



**UNIVERSIDAD TÉCNICA NACIONAL**  
**VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**  
**CENTRO DE FORMACIÓN PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA EDUCATIVA.**  
**MAESTRÍA EN ENTORNOS VIRTUALES DE APRENDIZAJE**

**PROYECTO DE INTERVENCIÓN**

**TÍTULO DEL PROYECTO:**

**Implementación de un entorno virtual de aprendizaje en las clases de matemáticas  
de los estudiantes de décimo año del Liceo Luis Dobles Segreda**

**PREPARADO POR:**

**Víctor Hugo Cortés Vargas**

**TUTOR DEL PROYECTO:**

**Mariela Delauro**

**AÑO, 2019**

## Tabla de contenido

Resumen Técnico.....	4
PROPUESTA DEL PROYECTO .....	5
1. Problema.....	6
1.1 Justificación del problema .....	6
1.2 Contexto del problema.....	7
2. Prospectiva.....	11
3. Propuesta pedagógica.....	12
4. Objetivos.....	14
4.1 Objetivo general.....	14
4.2 Objetivos específicos .....	14
5. Resultados Esperados.....	15
6. Aspectos Operativos .....	16
6.1 Administración del sistema.....	16
6.2 Aprendizaje y tecnologías .....	17
6.3 Tutoría .....	22
6.4 Materiales Didácticos .....	23
7. Evaluación y Seguimiento .....	24
7.1 Antes, durante y al finalizar el proyecto.....	24
7.2 Indicadores de evaluación de cada aspecto operativo.....	25
8. Cronograma para ejecución del proyecto .....	28
9. Presupuesto .....	29
10. Bibliografía.....	30
DESARROLLO DEL PROYECTO .....	32
1. Nombre del curso virtual.....	33
2. Selección y justificación de las herramientas tecnológicas .....	33
3. Planificación de las clases .....	36
4. Redacción de las clases.....	48
5. Captura de pantalla de las clases .....	84
DOCUMENTOS ELABORADOS.....	96
1. Guía Didáctica.....	97
2. Módulo .....	107

Conclusiones.....130

## Resumen Técnico

Este proyecto propone la implementación de la plataforma virtual de aprendizaje Classroom de Google en las clases de matemáticas de los estudiantes de décimo año del Liceo Luis Dobles Segreda por medio del trabajo coordinado entre el profesor de la asignatura y el departamento de innovación educativa institucional.

Para esto, se crean materiales, actividades y se implementan recursos tecnológicos que fomenten el trabajo colaborativo, la resolución de problemas, el pensamiento positivo hacia las matemáticas y el desarrollo de habilidades referentes al uso de la tecnología.

La propuesta pedagógica de este proyecto se debería de los cinco ejes disciplinares del programa de estudios de matemáticas, con fundamento en la concepción social del aprendizaje de Vigotsky y la teoría de aprendizaje significativo de Ausubel.

Para su ejecución se consideran varios aspectos operativos: administración del sistema, aprendizaje y tecnologías, tutoría y materiales didácticos, que también serán considerados para el proceso de evaluación y seguimiento del proyecto.

Durante el desarrollo del proyecto se le denomina CyborMath por la naturaleza híbrida de las clases, se justifica la selección de las herramientas tecnológicas, se fundamenta la estructura de acuerdo con los lineamientos del programa de estudio vigente y se elige la geometría como la unidad temática a desarrollar. En torno a ésta, se crea la Unidad Didáctica de Geometría para la cual se planifican, redactan y publican tres clases virtuales en la plataforma de aprendizaje Classroom.

Finalmente, se espera que en el corto plazo los estudiantes de décimo año cuenten con una plataforma de aprendizaje que estimule: la participación activa del estudiante en su propio aprendizaje, la toma de acuerdos para argumentar las posibles soluciones de un problema y las habilidades en el uso de softwares especializados en matemáticas.

# **PROPUESTA DEL PROYECTO**

## 1. Problema

Los nuevos programas de estudio de matemáticas en Costa Rica establecen como uno de sus ejes fundamentales y, potenciadores del aprendizaje de esta asignatura, “el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales” en las clases de matemáticas. Pero según los datos actuales, esto no se ha logrado en la mayoría de los centros educativos del país, entre los cuales se encuentra el Liceo Luis Dobles Segreda. Ante este panorama, se plantea un plan piloto para la implementación del uso inteligente de las tecnologías digitales en las clases de matemáticas de los estudiantes de décimo año del Liceo Luis Dobles Segreda, a través de un entorno virtual de aprendizaje y con la presunción de ser replicado a otros niveles en años posteriores.

### 1.1 Justificación del problema

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se han empleado en Costa Rica históricamente, han presentado una serie de dificultades, las cuales se evidencian en las estadísticas nacionales e internacionales que presentan esta asignatura con el rendimiento académico más bajo a nivel nacional.

Por tal motivo, a partir del año 2012, se aprueba una reforma integral a los programas de estudio en matemáticas que “enfatisa la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas asociados a su propio entorno”<sup>1</sup>.

Los nuevos programas, establecen que, el uso de las tecnologías digitales puede ser un “poderoso aliado para fomentar el pensamiento matemático”<sup>2</sup>, puesto que, a través de su implementación, se podrían concentrar esfuerzos en los procesos de razonamiento o de aplicación y disminuir los cálculos rutinarios; además de que favorecen la interacción entre el estudiante y el conocimiento, lo que permite “un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje”<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Ministerio de Educación Pública, Programas de Estudio de Matemáticas, Costa Rica, 2012

<sup>2</sup> Ministerio de Educación Pública, Programas de Estudio de Matemáticas, Costa Rica, 2012

<sup>3</sup> Ministerio de Educación Pública, Programas de Estudio de Matemáticas, Costa Rica, 2012

A pesar de estos planteamientos, el Cuarto Informe del Estado de la Educación, muestra que existen dificultades entre los profesores de matemáticas para adquirir competencias que les permitan utilizar la tecnología en sus prácticas de aula.

En el Liceo Luis Dobles Segreda se evidencia esta realidad, pertenece al programa de innovación educativa del Ministerio de Educación Pública (MEP), pero cuenta con pocas iniciativas para la incorporación del uso de la tecnología en las clases de matemáticas y, en las existentes, predominan las actividades centradas en el docente con escasa participación de los estudiantes.

Por todo lo anterior, se desea crear un plan piloto, con estudiantes de décimo año, que incorpore un entorno virtual para fomentar el uso de las tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas, además del aprendizaje colaborativo, la aplicación de la resolución de problemas y el fortalecimiento de las actitudes y creencias positivas hacia esta asignatura.

## **1.2 Contexto del problema**

### **1.2.1 La asignatura**

El décimo nivel corresponde al primero de los dos últimos años de la Educación Secundaria, ciclo denominado como Educación Diversificada, que se enfoca en profundizar los contenidos de los años anteriores y brindar temáticas relevantes para los estudiantes que pretenden realizar estudios superiores. Este nivel se imparte en un curso lectivo equivalente a nueve meses del año, fraccionado en tres periodos. Además, cuenta con cinco lecciones presenciales semanales, de cuarenta minutos cada una, en las cuales se analizan tres unidades temáticas: Geometría Analítica, Relaciones y Álgebra; y Estadística y Probabilidad.

En el caso del Liceo Luis Dobles Segreda, se crean ocho grupos de aproximadamente 38 estudiantes; los cuales se asignan a dos profesores. Uno de ellos coordinará el equipo responsable del proyecto, que también lo conforman el

personal del Departamento de innovación educativa de la institución, al cual se hará referencia en el apartado del contexto institucional.

Por otra parte, el programa de estudios establecido por el MEP, insta una opción pedagógica de dos etapas para gestionar las acciones en el aula y el planeamiento educativo. En la primera, se busca que el estudiante aprenda nuevos conocimientos y se recomienda la aplicación de cuatro momentos centrales:

- Propuesta de un problema.
- Trabajo estudiantil independiente.
- Discusión interactiva y comunicativa.
- Clausura o cierre.

En la segunda, se pretende reforzar los aprendizajes desarrollados en la primera, por medio de estrategias de aplicación y movilización de los conocimientos.

Comúnmente, los contenidos del nivel se desarrollan de forma presencial, con poco uso de herramientas tecnológicas, a pesar de la recomendación programática de utilizar softwares de graficación dinámica.

### **1.2.2 Los estudiantes**

Con el fin de recabar información al respecto se aplicó un formulario a 20 estudiantes de diferentes grupos de décimo año y se comparó con algunos datos brindados por el Departamento de Orientación de la institución.

El proyecto está dirigido a, aproximadamente, 150 estudiantes de décimo año del Liceo Luis Dobles Segreda, con edades entre los 15 y 16 años, con un promedio de cuatro años de pertenecer a la institución y vecinos de San José de Costa Rica, provenientes de diferentes lugares, generalmente de pueblos urbano marginales de la capital.

Estos jóvenes están acostumbrados a recibir su curso de matemáticas de forma presencial, usualmente a través de clases magistrales que son orientadas por medio

de un libro guía y con poca o nula interacción con medios didácticos tecnológicos. Cabe destacar que, según informe del Departamento de Orientación del liceo, este es el segundo nivel con menor rendimiento académico en la institución.

En el campo de la accesibilidad tecnológica, se encontró que: el 80% de los estudiantes cuenta con internet residencial, computadora, telefonía celular y el 100% de ellos, ha utilizado las herramientas de Office de Microsoft. Como la mayoría son estudiantes regulares de la institución, han recibido clases de informática educativa a través de la Fundación Omar Dengo, en los tres primeros años de secundaria; por lo cual podríamos suponer que poseen un bagaje elemental en la utilización de recursos tecnológicos, situación que se diferencia con el manejo de softwares especializados en matemáticas, como Geogebra o Winplot, puesto que, todos los estudiantes manifestaron desconocimiento de estos programas. Aun si, es importante resaltar que la mayoría considera positiva la inserción de las tecnologías en las clases de matemáticas.

La implementación de un entorno virtual y de softwares especializados en matemáticas, como los de graficación dinámica, contribuye a que los estudiantes desarrollen destrezas en el uso de herramientas tecnológicas para el aprendizaje y habilidades matemáticas como las transformaciones y modelizaciones, que se realizan en los temas de funciones, geometría analítica, entre otros.

### **1.2.3 Contexto institucional**

Primeramente, es importante destacar que el Liceo Luis Dobles Segreda está categorizado como un Colegio de Innovación Tecnológica desde el año 2007. El Proyecto de Innovación Educativa del MEP tiene como objetivos<sup>4</sup>:

1. Propiciar un cambio cualitativo en el proceso de enseñanza aprendizaje mediante el trabajo en ambientes de colaboración, que promuevan actitudes de participación responsable y capacidades

---

<sup>4</sup> Consejo Superior de Educación, Acta No.05-2006, San José, 2006

creativas e innovadoras, para la construcción de un proyecto pedagógico que permita desarrollar una cultura institucional acorde a los requerimientos actuales.

2. Desarrollar estrategias de trabajo conjunto familia-comunidad e institución, con el fin de ejecutar procesos educativos, administrativos y de autogestión, que sean de mutuo beneficio, donde el centro educativo sea un promotor de desarrollo.
3. Dotar a los colegios beneficiarios, sus docentes, sus estudiantes, y a los asesores nacionales y regionales, de infraestructura, mobiliario, recursos tecnológicos, bibliográficos y procesos de capacitación y actualización, que les permitan trascender al paradigma educativo de la sociedad del conocimiento y de la información.

A través de este programa se ha proporcionado a la institución recursos tecnológicos como: un laboratorio móvil y uno fijo, laboratorio para las clases de inglés conversacional, cámaras de vídeo, proyectores, pizarras inteligentes, tabletas, entre otros; además se ha nombrado el personal necesario para su implementación: una analista en sistemas y dos profesoras de informática educativa; las cuales brindan apoyo a los docentes de cada asignatura y se encargan tanto del mantenimiento como de la custodia de los recursos tecnológicos existen en el liceo.

Los trabajos ejecutados con el apoyo del Programa de Innovación Educativa, han sido de forma aislada y por iniciativa del docente, entre ellos se destacan dos intentos para implementar la plataforma Moodle, los cuales fracasaron por problemas con el proveedor. Actualmente, la institución está planteando la utilización de la plataforma Classroom de Google; para lo cual se brindará capacitación a los docentes.

Además, en el año 2018, se dotó a la institución con conexión a internet de banda ancha en todas las instalaciones del liceo.

Por todo lo expuesto, el Liceo Luis Dobles Segreda cuenta con los recursos suficientes y necesarios para desarrollar proyectos a través de plataformas virtuales de aprendizaje.

## **2. Prospectiva**

Dentro de dos años, las clases de matemáticas de décimo año estarán fortalecidas por la plataforma virtual Classroom, con la cual, los estudiantes podrán realizar actividades introductorias de los contenidos a desarrollar, a través del planteamiento de problemas que deben resolver y discutir con sus compañeros, en espacios interactivos como los foros o trabajos colaborativos, que estimulen la toma de acuerdos para argumentar las posibles soluciones. En esta plataforma, también, podrán consultar diferentes fuentes de información relacionados con los temas, como: sitios web, vídeos, archivos en pdf, aplicaciones, programas especializados en matemáticas, entre otros.

Además, este espacio contará con toda la información del curso: cronograma de actividades, desglose de evaluaciones, rúbricas de calificación, correo electrónico para la comunicación entre los estudiantes y el tutor.

También, el tutor estará coordinando con el Departamento de innovación educativa, la realización de varios proyectos; como la creación de manuales de los softwares a utilizar como el Geogebra, creación de clases y trabajos híbridos (presencial-virtual), la incorporación de nuevos niveles a la plataforma y talleres de capacitación tanto para los estudiantes como para los docentes que deseen incorporarse al proyecto.

Finalmente, los estudiantes contarán con habilidades desarrolladas en el uso de softwares especializados en matemáticas, como el Geogebra y Excel, que podrán emplear en el desarrollo de su aprendizaje.

### **3. Propuesta pedagógica**

Según los últimos Informes del Estado de la Educación, en Costa Rica, existe una dicotomía en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, entre la evidencia de que el buen uso de la tecnología en las clases contribuye con el éxito académico de los estudiantes y las dificultades de los docentes para adquirir habilidades tecnológicas.

Ante este panorama, es que la propuesta pedagógica, plasmada en este documento, parte de la premisa que los esfuerzos de capacitación docente, se deben orientar hacia el uso adecuado de los recursos tecnológicos en las lecciones, y toma como parte de su fundamento los cinco ejes disciplinares del Programa de estudios de matemáticas vigente en Costa Rica.

En primer lugar, la resolución de problemas, asociada esencialmente a la naturaleza de las matemáticas, problemas orientados a la contextualización activa que pretende que los estudiantes puedan resolver situaciones relacionadas con su entorno, en donde pueda modelarlas a través de la aplicación de conocimientos previos y con ello, desarrollar capacidades cognitivas superiores. También, el uso de la tecnología, la cual guarda una estrecha relación con los procesos de contextualización activa, sobre todo lo referente a la modelización, y que pretende convertirla en una herramienta potenciadora del pensamiento matemático. Finalmente, las creencias y actitudes positivas en torno a las matemáticas, generadoras de una visión integral y humanista de esta asignatura, por medio de la creación de actividades que fomenten la acción inteligente y creativa, la participación activa y colaborativa de los estudiantes y la vinculación de los conocimientos matemáticos con las realidades culturales y los medios tecnológicos de la sociedad actual.

Por todo lo anterior, es que se fundamenta este trabajo a través de la concepción social del aprendizaje de Vigotsky y la teoría de aprendizaje significativo de Ausubel.

Con este proyecto se busca promover la participación activa y el trabajo colaborativo de los estudiantes en las clases de matemáticas mediante materiales y actividades como el foro, los trabajos en Google Docs, similares a los desarrollados en los cursos de la Maestría en Entornos Virtuales de Aprendizaje de la Universidad Técnica Nacional, todo esto partiendo de la concepción de la Zona de Desarrollo Próximo de Vigotsky, en la que se establece que, “el aprendizaje tiene una naturaleza activa que se origina en la interacción social, donde la potencialidad de la apropiación cognitiva de la persona va a depender no sólo de lo que sabe hoy sino de lo que puede aprender con la ayuda del otro”<sup>5</sup>. En esta misma línea de pensamiento, se preñe recurrir al recurso de la gamificación de los aprendizajes, por medio de herramientas como Kahoot!, Socrative o Cerebiti, como elemento motivar de la participación de los estudiantes.

También, son importantes las ideas de Ausubel sobre la relación que existe entre el conocimiento previo y el “Aprendizaje Significativo”, en las cuales se determina que “el aprendizaje es significativo cuando puede relacionarse de modo no arbitrario con lo que el alumno ya sabe”<sup>6</sup>. Esto debe ser tomado en consideración al crear todos los materiales y actividades, con el uso del modelo de aula invertida que no sólo busca que el contenido llegue a estar disponible para los estudiantes fuera del tiempo de la clase presencial, sino además de que guarde una estrecha relación con lo planteado por Novak y Wogin, al proponer que, debe existir “un esfuerzo deliberado por relacionar los nuevos conocimientos con conceptos ya existentes en la estructura cognitiva”, para que se genere un aprendizaje que se relacione “con experiencias, hechos u objetos” y por medio de la interacción con los compañeros y el tutor se formen “implicaciones afectivas para relacionar los nuevos conocimientos con aprendizajes anteriores”<sup>7</sup>.

---

<sup>5</sup> Susana Espiro, Aprendizaje, 2017

<sup>6</sup> Susana Espiro, Aprendizaje, 2017

<sup>7</sup> Susana Espiro, Aprendizaje, 2017

## **4. Objetivos**

### **4.1 Objetivo general**

Diseñar un entorno virtual de aprendizaje para que los estudiantes de décimo año del Liceo Luis Dobles Segreda tengan acceso a softwares especializados en matemáticas y una serie de actividades y materiales que fomenten: el trabajo colaborativo, el aprendizaje significativo y el aprecio por las matemáticas, por medio del trabajo coordinado entre el profesor de la asignatura y el Departamento de innovación educativa institucional.

### **4.2 Objetivos específicos**

- 1) Crear una clase en la plataforma Classroom, que se adapte a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes de décimo año del Liceo Luis Dobles Segreda y a las exigencias del Programa de estudios de matemáticas.
- 2) Articular un equipo de trabajo entre el docente de matemáticas y el Departamento de innovación educativa institucional.
- 3) Preparar los equipos tecnológicos institucionales para el desarrollo del proyecto, a través de la configuración del servidor, instalación de programas en las computadoras, teléfonos celulares y la realización de pruebas de la plataforma.
- 4) Incorporar a los estudiantes en las clases de la plataforma Classroom.
- 5) Elaborar instructivos que permitan a los estudiantes aproximarse a las herramientas tecnológicas que ofrece la plataforma Classroom y el software de graficación dinámica Geogebra.
- 6) Buscar recursos multimediales, elaborados en Geogebra, que contribuyan al desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes.
- 7) Crear actividades para el entorno virtual, que fomenten la participación activa de los estudiantes, el trabajo colaborativo, el aprecio por las matemáticas y el uso del software especializado en matemáticas Geogebra.

- 8) Diseñar los instrumentos técnicos para la evaluación sumativa del aprendizaje de los estudiantes, acorde con lo establecido en las disposiciones del Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes vigente.
- 9) Generar las herramientas de seguimiento del proyecto en sus diferentes etapas, mediante los aportes de los estudiantes y el equipo de trabajo responsable del proyecto.

## **5. Resultados Esperados**

Al cabo de 2 años,

- 1) 300 estudiantes de décimo año, del Liceo Luis Dobles Segreda, cuentan con un entorno virtual de aprendizaje que enriquece el programa de matemáticas, por medio de estrategias de enseñanza y aprendizaje que capacitan al aprendiz en: el uso adecuado de la plataforma Classroom, el software matemático Geogebra, el trabajo colaborativo y el análisis crítico de la realidad.
- 2) Existe un equipo de trabajo conformado por el Departamento de innovación educativa y el profesor de matemáticas; que se encarga de: la creación de materiales e instrumentos de evaluación adecuados para un proceso educativo bimodal, mantener activa la plataforma Classroom y divulgar los resultados del proyecto con las autoridades institucionales, extra institucionales y con otros docentes de matemáticas.
- 3) El equipo de trabajo crea y revisa materiales y estrategias de aprendizaje, mediados con el uso de la plataforma Classroom y el software Geogebra; en consonancia con los ejes fundamentales del Programa de matemáticas y el trabajo colaborativo.

## 6. Aspectos Operativos

### 6.1 Administración del sistema

De acuerdo con el texto Gestión y evaluación de un sistema a distancia, del curso Planificación, seguimiento y evaluación de proyectos, existen cinco subsistemas de control que permiten la implementación de un proyecto; seguidamente se presenta el desarrollo de cada uno de ellos para esta propuesta:

- i. La inscripción y distribución de alumnos:

Estará a cargo del docente de la asignatura, que posee el acceso y los permisos de administración. Con respecto a la distribución de los grupos, es un aspecto que corresponde a la administración general de la institución y se realiza al inicio del curso lectivo.

- ii. La distribución y recepción de materiales:

La creación, recopilación y distribución del material didáctico se distribuirá de la siguiente forma:

- a) La analista del equipo de innovación educativa contribuye con la preparación y mantenimiento de los recursos tecnológicos del liceo; así como en dificultades informáticas que se le presenten al tutor de la asignatura.
- b) Las docentes de informática educativa se encargan de buscar e incluir los programas y elementos informáticos en las computadoras y en los teléfonos celulares de los estudiantes que lo deseen. También, ayudan al tutor y a los estudiantes con las dificultades informáticas que se generen.
- c) El tutor de la asignatura se encarga de enriquecer la plataforma virtual con la creación y distribución de las clases, actividades y evaluaciones que se requieren para el curso; además del seguimiento de los aprendizajes de los estudiantes y las respectivas retroalimentaciones.

iii. El seguimiento del proceso de aprendizaje:

Para este subsistema, en el año 2018 la institución invirtió en servidores de red de banda ancha, que permiten tener conexión a internet en todas las aulas del colegio, facilitándole al tutor la posibilidad de subir la información y los recursos pertinentes en la plataforma, sin necesidad de movilizarse a otros espacios. Además, como se mencionó en la primera parte del proyecto, se cuenta con: suficientes computadoras portátiles, acceso a internet, proyectores, servicio de fotocopiado institucional y una impresora; todo esto facilita la comunicación entre los diferentes actores del curso y el seguimiento del aprendizaje de los estudiantes por medio de la plataforma.

iv. La evaluación del aprendizaje:

La evaluación del curso será dirigida por el personal del Departamento de innovación educativa y el tutor, tanto en la parte de preparación de instrumentos, divulgación y análisis de la información suministrada por los mismos.

v. El otorgamiento de créditos y certificaciones:

Por la naturaleza de la institución y del programa, no se cuenta con certificaciones y créditos para este curso; en cambio, lo que se debe realizar es una evaluación sumativa, que determine un puntaje de la calificación del periodo correspondiente a las actividades realizadas por los estudiantes. Este puntaje será designado por el tutor, utilizando instrumentos técnicos, facilitados previamente a los estudiantes a través de la plataforma, espacio en el cual se formalizará la notificación de los resultados a cada estudiante.

## **6.2 Aprendizaje y tecnologías**

De acuerdo con lo establecido en el Programa de estudios de matemáticas de Costa Rica, los estudiantes de décimo año deben desarrollar habilidades en las áreas de: Geometría, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidades. Aunado a esto, se determina o recomienda el uso de la tecnología en algunas de las destrezas correspondientes a este nivel. La intención de este proyecto es enfocarse en estas habilidades específicamente y generar una propuesta de herramientas tecnológicas, que contribuyan a mejorar las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las mismas.

A continuación, se presentan las habilidades antes mencionadas, conjuntamente con una serie de actividades y recursos, enfocadas en el uso de la plataforma virtual Classroom, como medio para la enseñanza y aprendizaje de las mismas.

<b>Área: Geometría</b>		
Habilidad	Actividades	Recursos
Utilizar software para analizar características de la circunferencia.	Incorporación de estudiantes en la plataforma Classroom.  Taller presencial sobre el uso de la plataforma.  Tareas sobre la plataforma.  Taller acerca del uso de Geogebra.  Ejercicios sobre Geogebra.	Laboratorio Móvil.  Correos electrónicos.  Proyector.  Classroom  Geogebra.
Representar gráfica y algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.	Discusión sobre un problema contextualizado.  Socialización del concepto de ecuación de la circunferencia.  Análisis de la relación entre la representación gráfica y algebraica de una circunferencia.	Foro  Clase invertida - Vídeo  Geogebra
Aplicar traslaciones a una circunferencia.	Visualización de traslaciones de la circunferencia en el plano cartesiano.  Socialización del concepto de traslación de la circunferencia.	Geogebra  Clase invertida E-clase (PDF)

	Formulario de selección múltiple sobre el tema.	Google Forms
Representar gráfica y algebraicamente rectas secantes, tangentes y exteriores a la circunferencia.	<p>Socialización del concepto de rectas: secantes, tangentes y exteriores a la circunferencia.</p> <p>Uso de la calculadora científica para determinar la relación entre una recta y una circunferencia.</p> <p>Ejercicios de aplicación, trabajo colaborativo.</p>	<p>Clase invertida</p> <p>Power Point</p> <p>Vídeo, calculadora científica y Geogebra</p> <p>Kahoot!</p>
Utilizar software de geometría dinámica para estudiar propiedades y realizar conjeturas sobre las figuras geométricas.	<p>Discusión de un problema contextualizado.</p> <p>Experimentación con rompecabezas de polígonos.</p> <p>Socialización del método de triangulación para determinar el área de un polígono irregular.</p> <p>Determinación del perímetro de un polígono irregular con ayuda de la fórmula de distancia entre dos puntos.</p>	<p>Foro</p> <p>Geogebra</p> <p>Clase Invertida</p> <p>E-Clase (PDF)</p> <p>Vídeo</p> <p>Línea del tiempo</p>

	<p>Evolución histórica del Área bajo la curva hasta el Método de Riemann.</p> <p>Ejercicios de aplicación, trabajo colaborativo.</p>	<p>Google Forms</p>
<p>Identificar el radio y el diámetro de una esfera, superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.</p>	<p>Discusión de un problema contextualizado.</p> <p>Identificación de las partes de la esfera y un cilindro circular recto en aplicaciones simuladas.</p>	<p>Foro</p> <p>Geogebra</p>
<p>Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.</p>	<p>Identificación de las secciones que se forman al intersecar un plano con la esfera o el cilindro circular recto en aplicaciones simuladas.</p> <p>Ejercicios de aplicación, trabajo colaborativo.</p>	<p>Geogebra</p> <p>Kahoot!</p>

<b>Área: Relaciones y Algebra</b>		
Habilidad	Actividades	Recursos
Utilizar software matemático para analizar los parámetros de la ecuación de una función lineal, gráfica y algebraicamente.	<p>Taller sobre Google Docs</p> <p>Trabajo colaborativo para resolver un problema contextualizado.</p> <p>Formalización de las características de una recta tanto algebraica, como gráficamente.</p> <p>Práctica de ejercicios de función lineal.</p>	<p>Vídeo</p> <p>Google Docs</p> <p>Clase invertida</p> <p>E-clase (PDF)</p> <p>Geogebra</p>
Utilizar software matemático para analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática.	<p>Trabajo colaborativo para resolver un problema contextualizado.</p> <p>Formalización de las características de una función cuadrática de forma gráfica y algebraica.</p> <p>Resolución de problemas utilizando los elementos de la función cuadrática.</p>	<p>Google Docs</p> <p>Clase invertida</p> <p>E-clase (PDF) y Geogebra</p> <p>Geogebra</p>

<b>Área: Estadística y Probabilidad</b>		
Habilidad	Actividades	Recursos
Utilizar la calculadora con funciones estadísticas o algún programa especializado para simplificar los cálculos de medidas estadísticas.	Resolución de un problema contextualizado aplicando los conceptos de las medidas de posición conocidas con anterioridad (moda y promedio).	Clase invertida  Foro
	Formalización de los conceptos de medidas de posición.	E-clase (PDF)
	Taller sobre cálculos de medias de posición con Geogebra.	PDF, vídeos y Geogebra.
	Trabajo colaborativo para resolver un estudio de caso donde se aplican las medidas de posición.	Google Docs, Google Forms, Geogebra y Foro

### **6.3 Tutoría**

En esta primera ejecución del proyecto, se trabaja con un tutor de la asignatura y dos profesoras de informática educativa implementando el modelo TPACK, con énfasis en el trabajo colaborativo. Por ello, se toman en consideración varios aspectos para el seguimiento, devolución y retroalimentación entre los aprendices, el tutor y el personal del Departamento de innovación educativa.

Cada funcionario dedicará una hora y treinta minutos semanales al trabajo virtual del proyecto, aunado a esto y por la naturaleza de la estructura institucional, el tutor de la asignatura, brindará tres horas y treinta minutos semanales adicionales a la

etapa presencial del curso. De acuerdo con esto, se considera oportuna la estructura efectuada por la Maestría en Entornos Virtuales del Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente y se procurará aplicar varios de los aspectos que en ella se proponen, entre ellos:

- a) La mensajería interna, que será utilizada como medio de comunicación personalizada entre los aprendices y el tutor, para evacuar dudas o dificultades presentes en el desarrollo de las actividades y como forma de captar la atención de los estudiantes que no participan en las actividades de la plataforma.
- b) Asignaciones grupales que impulsen el trabajo colaborativo, a través de herramientas como Google Docs o Wikis.
- c) Los foros con la intención de generar el intercambio de ideas y conocimientos entre los mismos aprendices y con algunos aportes del tutor.
- d) Avisos y noticias para mantener informado al estudiante sobre la publicación de nuevas clases y actividades de cada semana.
- e) Seguimiento personalizado de los estudiantes, mediante el control de ingresos y las devoluciones periódicas, con el propósito de motivar la participación de los mismos en las actividades.
- f) Instrumento de evaluación, donde se permita al estudiante, de forma anónima, manifestar su opinión sobre las actividades, los materiales y la tutoría de la asignatura. Información relevante para el análisis y la mejora continua del curso.

#### **6.4 Materiales Didácticos**

En el campo de los materiales didácticos, su producción está a cargo del tutor en lo referente a las actividades especializadas de la asignatura y, del personal del Departamento de innovación educativa, para los tutoriales referentes a aprendizajes informáticos, con excepción del programa Geogebra, puesto que, este cuenta con un banco de recursos de acceso libre en línea, que pueden ser descargados y modificados en función de las actividades que se plantean en este proyecto.

Entre los materiales que se pretenden crear, específicamente, para cada área se encuentran:

⇒ Área: Geometría.

- a) Manual de herramientas básicas de Classroom.
- b) Manual de herramientas básicas de Geogebra.
- c) Tareas de Classroom y Geogebra.
- d) Vídeos.
- e) Documentos PDF interactivos con archivos de Geogebra.
- f) Formularios en Google Forms con códigos QR.
- g) Presentaciones en Power Point, Impress o similar.
- h) Actividades en Kahoot!
- i) Actividades en Geogebra.

⇒ Área: Relaciones y Álgebra.

- a) Documentos PDF interactivos con Geogebra.
- b) Tareas de Geogebra.
- c) Tutorial Google Docs.

⇒ Área: Estadística y probabilidad.

- a) Documentos PDF.
- b) Vídeos.
- c) Tutorial de Geogebra acerca de las medidas de posición.

## **7. Evaluación y Seguimiento**

### **7.1 Antes, durante y al finalizar el proyecto**

El seguimiento del proyecto se realiza por medio de la participación de los estudiantes en actividades de aplicaciones como Socrative o Kahoot!, con la finalidad de que externen su opinión sobre los temas fundamentales del proyecto. También se realizarán reuniones presenciales con el personal del Departamento de

innovación educativa y el tutor encargado de la asignatura, que deben estar acordadas previamente en el cronograma de actividades. Todo esto será recopilado en una bitácora, en la cual se anotarán las ideas principales y disposiciones que se tomen en el desarrollo del curso.

Esta bitácora recopilará información de las partes fundamentales del proyecto, es decir: modelo pedagógico general, prácticas de aprendizaje y tecnologías, material didáctico, tutoría y administración, en concordancia con los indicadores determinados y la fundamentación pedagógica.

## **7.2 Indicadores de evaluación de cada aspecto operativo**

A continuación, se despliega una serie de indicadores que pretenden guiar la evaluación del presente curso a través de sus objetivos, fundamentos pedagógicos y categorizados de acuerdo con lo que se ha denominado temas fundamentales del proyecto. Estos indicadores consisten en una interpretación de algunos criterios de evaluación, presentes en el informe final de la Comisión Asesora de Educación a Distancia del Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de Argentina (CONEAU).

### **i. Modelo pedagógico general**

Para este proyecto se han considerado dos pensamientos fundamentales como directrices de la propuesta pedagógica. Primeramente, la Zona de Desarrollo Próximo de la concepción vigotskiana del aprendizaje social; además de la noción de aprendizaje en función de los conocimientos previos, de las teorías del Aprendizaje Significativo de Ausubel. Todo esto mediado por el modelo de clase invertida, la gamificación y la creación de materiales y actividades que fomenten la participación activa y colaborativa, y la metodología de la Resolución de Problemas, sugerida por el Programa de Estudios de Matemáticas.

Desde esta perspectiva se consideran los siguientes indicadores para la evaluación del modelo pedagógico general:

- Es deseable la existencia de un fuerte compromiso de todos los actores que integran el equipo de trabajo de este proyecto (el Departamento de innovación educativa y el tutor de la asignatura).
- Es imprescindible que el modelo utilizado esté orientado hacia formas de aprendizaje colaborativo y la participación activa de los estudiantes.

## ii. Prácticas de aprendizaje y tecnologías

Tomando en consideración que esta propuesta se fundamenta en el uso de la plataforma virtual Classroom y el software libre Geogebra, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de décimo año del Liceo Luis Dobles Segreda; se proponen los siguientes indicadores para la evaluación de las prácticas de aprendizaje y las tecnologías utilizadas:

- Es imprescindible que la institución garantice la existencia de altos grados de interactividad (relación de los alumnos con los materiales y la tecnología) y de interacción (relación del tutor con los estudiantes y de estos entre sí) mediante el uso de tecnologías acordes con la fundamentación del proyecto.
- Es imprescindible que el tutor de la asignatura presente y fundamente el diseño de evaluación de los aprendizajes que concuerde con la visión de trabajo colaborativo y el aprendizaje significativo, la metodología de resolución de problemas y la naturaleza híbrida del curso.

## iii. Material didáctico

La creación y selección de los recursos didácticos recae principalmente sobre el tutor del curso y cuenta con el apoyo del personal del Departamento de innovación educativa para el diseño de los materiales que se refieran a la parte técnica de los programas informáticos.

Para la evaluación de esta área fundamental del proyecto se sugieren los siguientes indicadores:

- Es imprescindible que los materiales didácticos muestren un tratamiento adecuado de los aspectos disciplinares, pedagógicos, didácticos y de todos aquellos referidos al diseño y desarrollo tecnológico.
- Es imprescindible que el curso posea mecanismos de actualización y mejoramiento de los materiales didácticos.

#### iv. Tutorías

El aprendizaje con el apoyo de entornos virtuales requiere de una planificación exhaustiva de la mediación pedagógica. Por este motivo, se pretende que la tutoría de este proyecto implemente el modelo TPACK, en donde se consideren aspectos para el seguimiento, devolución y retroalimentación entre los diferentes actores del curso. Con esta finalidad se consideran los siguientes indicadores para la evaluación de este aspecto:

- Es imprescindible la generación de espacios de interacción (físicos y virtuales) entre los actores de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Es imprescindible que el curso cuente con la planificación del seguimiento, consulta periódica e interacción con los estudiantes y con el tutor, en el desarrollo de las actividades de aprendizaje que se evalúan mediante las modalidades oportunamente definidas.

#### v. Administración

Como se menciona en el texto Fase de Planificación Operativa, de la Unidad 3 del curso planificación, seguimiento y evaluación de proyectos, “los aspectos administrativos van cobrando fuerza y significan una inversión de tiempos y la necesidad de crear una estructura para que todo funcione a fin de poder trabajar en lo esencial”. Desde esta perspectiva se establecen los siguientes indicadores:

- Es imprescindible que la institución garantice un tratamiento interdisciplinario para la gestión pedagógica y técnica, a través de la disponibilidad de los recursos humanos necesarios en función de la envergadura y el alcance de los objetivos.

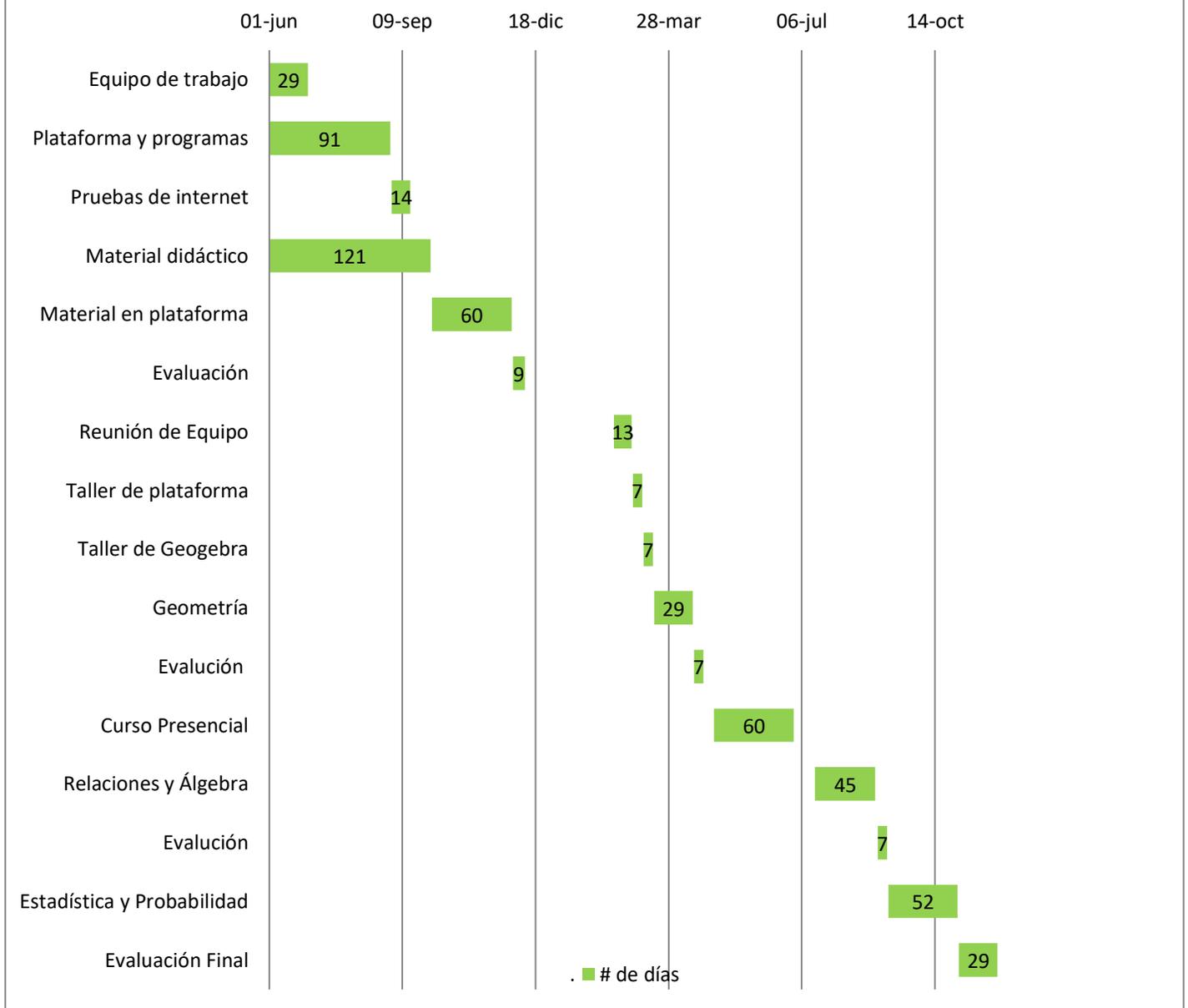
- Es imprescindible que la institución garantice la existencia del soporte técnico necesario y suficiente para estudiantes, tutores y docentes; con especial énfasis en el impulso a la interacción.

## **8. Cronograma para ejecución del proyecto**

A continuación, se presenta el cronograma de actividades que se pretende cumplir para la ejecución del proyecto, seguido de un gráfico del mismo.

- 1) Formación del equipo de trabajo y distribución de responsabilidades (1 mes).
- 2) Configuración del servidor, instalación de programas en las computadoras, instalación y pruebas de la plataforma. (3 meses).
- 3) Pruebas de la plataforma vía internet (2 semanas).
- 4) Elaboración de los materiales didácticos (4 meses).
- 5) Incorporación de los materiales didácticos a la plataforma (2 meses).
- 6) Reunión de equipo de trabajo (2 semanas).
- 7) Incorporación de los estudiantes a la plataforma (2 semanas).
- 8) Taller de capacitación y reconocimiento de la plataforma (1 semana).
- 9) Taller de capacitación y reconocimiento de Geogebra (1 semana).
- 10) Geometría (1 mes).
- 11) Evaluación del funcionamiento y resultados (1 semana).
- 12) Curso presencial (2 meses).
- 13) Vacaciones (2 semanas).
- 14) Relaciones y álgebra (1 mes y dos semanas).
- 15) Evaluación del funcionamiento y resultados (1 semana).
- 16) Estadística y probabilidad (2 meses).
- 17) Evaluación integral del proyecto y presentación del informe a la dirección del colegio (1 mes).

## Cronograma del proyecto



Finalmente, en el campo de la eficiencia, la institución cuenta con recursos suficientes para brindar una opción de aprendizaje virtual, sin la necesidad de crear nuevos costos. Además, se optará por la utilización de programas y aplicaciones de Software Libre, como se ha mencionado anteriormente en los casos de la plataforma Classroom y el programa Geogebra; todo esto en el aspecto de la eficiencia económica. Por otra parte, la eficiencia pedagógica estará a cargo del

Departamento de innovación educativa institucional y el tutor de la asignatura que establecerán, de manera conjunta, tanto las metas que se intentarán alcanzar con el curso y el cronograma de trabajo para conseguirlas.

El presupuesto que se muestra seguidamente, realiza una aproximación a los gastos que debe efectuar la institución mensualmente para la implementación de esta propuesta tanto en los recursos humanos, tecnológicos y de infraestructura.

<b>Presupuesto general del Proyecto</b>		
<b>Cargo</b>	<b>Cantidad</b>	<b>Costo promedio por mes</b>
Tutor	1	\$ 1 368
Docente de informática	2	\$ 2 736
Analista de sistemas	1	\$ 1 452
Mantenimiento	1	\$ 1 000
	Total	\$ 6 556

## **10. Bibliografía**

Becerra, M., Bavio E., Díaz, E., Maggio, M., Martínez, L., Mena, M., Prieto, D. y Santánge H., (s.f.). informe final de la Comisión Asesora de Educación a Distancia del Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de Argentina (CONEAU). Argentina.

Espiro, S. (2017), Aprendizaje, 2017

Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente (2017). Gestión y evaluación de un sistema a distancia.

Ministerio de Educación Pública (2012), Programas de Estudio de Matemáticas, Costa Rica.

Programa Estado de la Nación (2013), Cuarto Informe Estado de la Educación,  
Costa Rica.

Programa Estado de la Nación (2017), Sexto Informe Estado de la Educación,  
Costa Rica.

# **DESARROLLO DEL PROYECTO**

## **1. Nombre del curso virtual**

CyborgMath

## **2. Selección y justificación de las herramientas tecnológicas**

### **2.1 Justificación**

El Liceo Luis Dobles Segreda se cataloga como un colegio de innovación tecnológica, lo cual le brinda una serie de herramientas en esta área. Entre estas se encuentra la posibilidad de habilitar diferentes plataformas para el aprendizaje.

El Departamento de Innovación Educativa, junto a docentes de diferentes asignaturas, realizó varios intentos para implementar la plataforma Moodle en la institución, pero se presentaron diversas dificultades, que dieron al traste con estas iniciativas.

Para la realización del presente proyecto, se considera este panorama mencionado anteriormente, por lo cual se toma la iniciativa de buscar otra plataforma de aprendizaje que posea herramientas similares a las de Moodle.

Classroom es una aplicación de Google para educación, que se puede utilizar como plataforma de aprendizaje para organizar y mejorar la comunicación entre docentes y estudiantes.

Por medio de la apertura de un correo electrónico en Gmail se consigue acceder a Classroom y todas las ventajas que esta presenta:

- Software libre y seguro, que resguarda la privacidad de los datos de los estudiantes.
- Facultada para la interacción con otras aplicaciones de Google.
- Es una plataforma muy amigable, que permite crear cómodamente las aulas o clases.
- Fácil incorporación de los estudiantes a las clases por medio de un código o a través de la invitación del docente.

- Posibilita la generación de actividades para fomentar el trabajo colaborativo, como foros y asignaciones en Google Docs.
- Permite mayor fluidez en la comunicación entre el docente y los estudiantes con un espacio para noticias, novedades, entre otras.
- Contribuye con la organización y programación de contenidos y trabajos de los estudiantes.
- Facilidad para consultar los materiales y las asignaciones desde la aplicación móvil de Classroom o desde el ordenador.

Además, a raíz de algunos ensayos realizados por mi persona con estudiantes de noveno en el año 2018 y las capacitaciones sobre la plataforma Classroom recibidas por las docentes de informática del Departamento de Innovación Educativa; surgió la iniciativa de fomentar institucionalmente la utilización de esta plataforma entre otros docentes, por lo cual, cobra mayor relevancia la implementación de este proyecto.

## **2.2 Fundamentación de la estructura**

El Programa de estudios de Matemáticas en Costa Rica, está organizado en cinco áreas matemáticas y habilidades, planteadas de la siguiente forma: Relaciones y Álgebra, Estadística y Probabilidad, Geometría, Números y Medidas; con las cuales se pretende que el estudiante desarrolle capacidades cognitivas que le permitan elaborar procesos para la vida de: razonar, argumentar, plantear, resolver, comunicar, conectar y representar. De estas áreas en las que se organiza el programa, en décimo año de secundaria se establece el abordaje de las tres primeras que se mencionaron.

Para lograr este objetivo, se establecen cinco ejes disciplinares que fortalecen el currículo, entre los que se destacan para este proyecto: la resolución de problemas como estrategia metodológica principal, la contextualización activa como componente pedagógico especial y el uso inteligente y visionario de las tecnologías digitales. Estos guardan una estrecha relación con la propuesta pedagógica de esta

propuesta, que toma como fundamento la concepción social del aprendizaje de Vigotsky y la teoría de aprendizaje significativo de Ausubel.

Además, este programa, establece una secuencia temática para la implementación de los tópicos de las áreas matemáticas para cada año lectivo y fija las habilidades en las que se debe hacer uso de la tecnología para el desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Por todo lo anteriormente mencionado y la naturaleza híbrida de las clases de este proyecto, se establecieron siete temas dentro del aula de Classroom propuesta para los alumnos de décimo año. El primero, contiene la Guía Didáctica del curso que incluye toda la información necesaria para el correcto y provechoso desempeño de los estudiantes dentro de las actividades de aprendizaje. Los siguientes tres, corresponden a las unidades de las áreas temáticas que se desarrollan en décimo año: Geometría, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidad. Estos ordenados de acuerdo con la secuencia temática establecida por el programa de estudios, con la intención de coordinar adecuadamente las actividades que se realizarán tanto en la etapa presencial como virtual del curso.

En estos tres temas, se subirán las clases y los materiales que corresponden a cada área de conocimiento matemático.

Seguidamente se crearon los temas de tareas y foros, en donde se encuentran actividades con la intencionalidad de fomentar el trabajo colaborativo y participativo de los estudiantes e implementar los ejes disciplinares de resolución de problemas, contextualización activa y el uso inteligente y visionario de las tecnologías digitales, según lo establecido en el programa.

Finalmente, se creó un espacio con el nombre de recursos, donde se suben vídeos, enlaces y materiales que los estudiantes pueden consultar para fortalecer el aprendizaje de los conocimientos que se desarrollan en este nivel.

Con respecto a las herramientas que se utilizan para realizar las actividades y materiales que forman parte de cada sección, se consideraron las teorías de la

propuesta pedagógica de este proyecto y los ejes disciplinares del programa de estudio de la siguiente forma:

- Fomento del trabajo colaborativo y participativo, la zona de desarrollo próximo y la contextualización activa con técnicas como el estudio de caso y problemas contextualizados utilizando las herramientas: foro, clase invertida, Geogebra, Google Forms, Google Docs y la gamificación a través de Kahoot!.
- Promover la resolución de problemas y el aprendizaje significativo relacionado con los conocimientos previos, a través de la formalización, aplicación y socialización de conceptos y, el análisis y visualización de relaciones con las herramientas: clase invertida, E-clase con documentos pdf, Geogebra, foro, vídeo, presentación y hoja de cálculo.

También se consideran actividades y materiales que permitan a los estudiantes evaluar el desarrollo de las habilidades que se le solicitan en este nivel con herramientas como Google Forms y Kahoot!.

Finalmente, durante el desarrollo de todas las actividades y materiales propuestos se consideró el eje disciplinar del programa sobre el uso inteligente y visionario de las tecnologías digitales.

### **3. Planificación de las clases**

#### **3.1 Núcleos del módulo**

La unidad didáctica correspondiente a Geometría cuenta con tres núcleos principales: Geometría Analítica, Polígonos y Visualización Espacial. De acuerdo con los contenidos que desarrolla cada núcleo se determina el número de clases. Para el primero se establece la necesidad de desarrollar tres clases, para el segundo dos y para el tercero se necesita solamente una.

De estas seis clases, se desarrollarán tres para el proyecto de intervención. Una de cada núcleo, correspondiente a los temas: Posición relativa de puntos y rectas en la circunferencia, áreas y perímetros de curvas y polígonos irregulares y, por último, sólidos de revolución.

### 3.2 Clases

Clase # 1: La circunferencia, un anillo que gobierna nuestro entorno.

- *Objetivos de la clase:*

a) Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia.

b) Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia.

- *Listar los contenidos de la clase:*

a) Posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia.

Definiciones, Distancia entre dos puntos y Posición de un punto en el plano cartesiano.

b) Rectas en la circunferencia.

Rectas secantes, tangentes y exteriores, Ecuación canónica de la recta en relación con la ecuación de la circunferencia, Discriminante de una ecuación cuadrática y Rectas y circunferencias en el plano cartesiano.

- *Bibliografía para esta clase:*

Cortés, Víctor (2019). Geometría.

Convenio MEP-ICER (s.f). Matemática a tu medida. Material de apoyo para la prueba No.1. Entrega No.1. El Maestro en casa. Recuperado de <http://costarica.elmaestroencasa.com/e-books/elmec/bach-a-tu-medida/matematica-a-tu-medida.pdf>

**(Estos dos primeros recursos bibliográficos también son tomados en cuenta para las clases 2 y 3, por lo tanto, no se volverán a enunciar)**

Cide@d (s.f.). La circunferencia y el círculo. Matemática 1° ESO. Recuperado de <http://www.edu365.cat/eso/muds/matematiques/edad/eso1/1quincena10/1quincena10.pdf>

- *Recursos multimedia que utilizar:*

Imagen del avatar del profesor, tomado de la aplicación Bitmoji, se coloca al inicio de las clases con el nombre del profesor. URL: <https://render.bitstrips.com/v2/cpanel/a41da708-81e9-4ec3-9364-9d8748f7063d-58c55fa5-74e1-4421-872e-89b110d70efd-v1.png?transparent=1&palette=1>

Imagen de la aplicación Geogebra que muestra una tableta con una mano que indica a los estudiantes que pueden acceder a un recurso de este programa. URL: <https://www.mertxejbadiola.com/robotica-stem/geogebra/>

Imagen del avatar del profesor con un signo de pregunta, tomado de la aplicación Bitmoji para indicar en las clases que se debe pensar en una pregunta. URL: <https://render.bitstrips.com/v2/cpanel/9d438724-a1e5-44b9-9172-377503bbffe6-58c55fa5-74e1-4421-872e-89b110d70efd-v1.png?transparent=1&palette=1>

Imagen del logotipo del profesor, se coloca como cierre de las clases. URL: <https://www.freelogoservices.com/es/step3/logo/576027035/refresh>

**(Estos cuatro primeros recursos multimediales también se utilizan en las clases 2 y 3, por lo tanto, no se volverán a enunciar)**

Imagen de anillo como recurso de introducción a la clase y en relación con el título. URL: <https://xn--oo-yjab.cl/anillo-unico-senor-de-los-anillos/>

Imagen de la invención de la rueda que refiere al tema que se desarrolla en la página que aparece. URL: <http://computadoreslomahermosa.blogspot.com/2016/02/la-invencion-de-la-rueda.html>

Vídeo que explica cómo funcionan las ondas sísmicas con la intención de relacionarlo con la posición de un punto con respecto a la circunferencia. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=qWxHoVXnAjM>

Imagen que muestra la corteza terrestre y las ondas sísmicas desde el epicentro. URL: <https://twitter.com/chematierra/status/1031018220092878848>

Recurso de Geogebra, la relación entre la distancia entre un punto y el centro de la circunferencia con respecto al radio. URL: <https://www.geogebra.org/m/hgCwY28C>

Vídeo ¿Por qué decimos lo que decimos?, para explicar la frase “Salirse por la tangente”. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=idUI8k8YoVA>

Recurso de Geogebra que muestra las tres posiciones de una recta con respecto a la circunferencia. URL: <https://www.geogebra.org/m/JQ5ZjKXU>

Vídeo que muestra una forma algebraica de determinar la posición de la recta con respecto a la circunferencia. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=AcjC1YQ\\_e1k](https://www.youtube.com/watch?v=AcjC1YQ_e1k)

- *Actividades:*

**Consigna #1:** Leer el pdf Posición de puntos y rectas con respecto a la circunferencia.

**Objetivo:** Formalizar del tema posición de rectas y puntos con la circunferencia.

**Evaluación:** Realización de ejercicios del Trabajo Cotidiano # 2 en donde se utilizan los conceptos expuestos en el pdf Posición de puntos y rectas. Rúbrica de Habilidades.

**Plazo:** una semana

**Consigna #2:** Realizar de forma grupal la Tarea # 1. Graficar en Geogebra rectas tangentes, secantes y exteriores a la circunferencia.

**Objetivo:** Analizar gráficamente la relación entre las rectas y la circunferencia.

**Evaluación:** Rúbrica de habilidades

**Plazo:** dos semanas.

- *Foro:* ¿Qué pueblo se “salvó” del temblor?

Ana es una inmigrante venezolana que reside en Costa Rica. Mientras desayuna le gusta leer un diario y se encuentra el siguiente titular:

“Un sismo de 7.3 grados de magnitud, sacudió la costa norte de Venezuela. Su epicentro fue en la zona de Yaguaraparo, en el estado Sucre. Se pudo sentir en gran parte del país, incluyendo también partes de Colombia, Trinidad y Tobago y Barbados. El Centro de Alerta de Tsunamis del Pacífico emitió una alerta de maremoto para un radio de 300 kilómetros a la redonda del epicentro”

Ana se preocupa, porque tiene familiares en Caracas Venezuela y en Puerto España de Trinidad y Tobago.

Con ayuda de Google Maps y el archivo adjunto de Geogebra determine ¿Cuál o cuáles de estados dos ciudades se podrían ver afectadas por el maremoto?

**Objetivo:** Contextualizar los criterios matemáticos estudiados, estimular la capacidad de análisis de una situación del entorno y concientizar sobre las dificultades de los inmigrantes en Costa Rica.

**Plazo:** Una semana.

#### Clase # 2: Divide y vencerás

- *Objetivos de la clase:*

a) Determinar Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

b) Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.

- *Listar los contenidos de la clase*

a) Áreas y perímetros de polígonos irregulares

Triangulación de un polígono irregular en el plano cartesiano.

b) Áreas y perímetros de figuras curvas

Método Exhaustivo y Método de Riemann en el plano cartesiano.

- *Bibliografía para esta clase*

Universo fórmulas (s.f.). Área de un polígono irregular. Recuperado de

<https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/area-poligono-irregular/>

- *Recursos multimedia que utilizar*

Imagen del Teorema de Pitágoras que activa el recurso de la demostración geométrica. URL: <https://teoremapitagoras.com/teorema/teorema-de-pitagoras>

Recurso de Geogebra con Rompecabezas del Teorema de Pitágoras. URL: <https://www.geogebra.org/m/QptkEwBS>

Imagen de un Tangrama que permite abrir un recurso de Geogebra para manipular figuras. URL: <http://es-coloring.clay-house.org/cc04c092/54702/15>

Imagen que representa la triangulación de un polígono regular en su forma más básica. URL: <http://gutierrezfedericog.blogspot.com/2015/08/perimetros-areas-y-volumenes.html>

Imagen de la triangulación de un polígono irregular con diferentes figuras: [http://www.fao.org/tempref/FI/CDrom/FAO\\_Training/FAO\\_Training/General/x6707s/x6707s10.htm](http://www.fao.org/tempref/FI/CDrom/FAO_Training/FAO_Training/General/x6707s/x6707s10.htm)

Vídeo que explica como calcular el perímetro de un polígono irregular en el plano cartesiano URL: <https://www.youtube.com/watch?v=2QxZ022KRy0>

Recurso de Geogebra que muestra cómo se realiza la aproximación del área de una figura curva por el Método Exhaustivo de Arquímedes. URL: <https://www.geogebra.org/m/yqcPCnXg>

Imagen de figuras geométricas que activa el recurso sobre el Método Exhaustivo de Arquímedes. URL: [https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_exhaustivo](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_exhaustivo)

Imagen que muestra los rectángulos que se hacen para determinar el área bajo la curva. URL: <http://cienciasdejoseleg.blogspot.com/2012/12/el-problema-del-area-bajo-una-curva.html>

Recurso de Geogebra que muestra cómo se aproxima el área bajo una curva con ayuda de rectángulos. URL: <https://www.geogebra.org/m/wp7jxyck>

Vídeo que explica cómo se calcula el área bajo una curva en el plano cartesiano. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=V7penn90\\_m8](https://www.youtube.com/watch?v=V7penn90_m8)

Línea del tiempo con la evolución del área bajo la curva. URL: [https://cdn.knightlab.com/libs/timeline3/latest/embed/index.html?source=1RrI9Wi9kITF-a\\_CVCDy37ICuV0Teec7YliGHsgBk2gl&font=Default&lang=en&initial\\_zoom=2&height=650](https://cdn.knightlab.com/libs/timeline3/latest/embed/index.html?source=1RrI9Wi9kITF-a_CVCDy37ICuV0Teec7YliGHsgBk2gl&font=Default&lang=en&initial_zoom=2&height=650)

Imagen para el foro, que muestra los toboganes de invierno en Rusia, origen de la montaña rusa. URL: <http://rollercoaster.blogspot.com/2010/10/historia-de-las-montanas-rusas.html>

Imagen para el foro donde se muestra la estructura de una montaña rusa. URL: <https://flynchglobal.wordpress.com/2013/09/08/para-amantes-de-las-montanas-rusas/>

Avatar del profesor “See you in class” para terminar la clase virtual e invitar a la clase presencial. URL: <https://render.bitstrips.com/v2/cpanel/3e8e4b24-88c5-4418-84e8-5c2fb539630d-58c55fa5-74e1-4421-872e-89b110d70efd-v1.png?transparent=1&palette=1>

- *Actividades;*

**Consigna #1:** Leer el pdf Áreas y Perímetros de polígonos irregulares y curvas.

**Objetivo:** Formalizar los conceptos de área y perímetro de un polígono irregular y de figuras bajo la curva.

**Evaluación:** Realización de un trabajo colaborativo en Forms de Google, con ejercicios en donde se utilizan los conceptos expuestos en el pdf antes mencionado.

**Plazo:** una semana

- *Foro:*

La montaña rusa debe su nombre a las diversiones desarrolladas durante el invierno en Rusia, donde existían grandes toboganes de madera que se descendían con trineos deslizables sobre la nieve. Irónicamente, los rusos lo llaman *Amyerikánskiye gorki* (en ruso: *Американские горки*) o "montaña Americana".

(Wikipedia)

En la siguiente imagen se muestra un segmento de la montaña rusa, cuyos railes forman una curva. Debajo de esta curva se muestra la estructura que sostiene la montaña rusa y que cubre un área determinada.

Busque un método para determinar el área que cubre la estructura que se encuentra bajo los railes de la Montaña Rusa que se muestra en la imagen y coméntelo con los compañeros en el foro.

**Objetivo:** Introducir el concepto de área bajo la curva y estimular la capacidad de análisis de una situación del entorno y el trabajo colaborativo.

**Plazo:** Una semana.

### Clase # 3: El mundo sigue girando

- *Objetivos de la clase:*

- a) Identificar el radio y el diámetro de una esfera.
- b) Identificar la superficie lateral, las bases, la altura, el radio y el diámetro de un cilindro circular recto.
- c) Determinar qué figuras se obtienen mediante secciones planas de una esfera o un cilindro y características métricas de ellas.
- d) Reconocer elipses en diferentes contextos.

- *Listar los contenidos de la clase*

- a) Sólidos de Revolución.
- b) Esfera.

Partes de la esfera y Secciones planas que se forman en la esfera.

- c) Cilindro circular recto.

Partes del cilindro, Secciones planas que se forman en el cilindro y La elipse.

- *Bibliografía para esta clase*

Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2017). Conos, cilindros y esferas (Material complementario). Colección Preparación Matemáticas Bachillerato. Recuperado de: <https://www.reformamatematica.net/wp-content/uploads/2018/09/PMB-G04-MatComplementario.pdf>

Such, Marina (2015). ¿Y si la estrella de la muerte fue la ciudad inteligente del futuro?. URL: <https://www.bloglenovo.es/y-si-la-estrella-de-la-muerte-fuese-la-ciudad-inteligente-del-futuro/>

- *Recursos multimedia que utilizar*

Aplicación similar a la introducción de Star Wars con un texto para motivar el estudio de esta clase. URL:

[https://starwarsintrocreator.kassellabs.io/#!/BLqJhgZDtAjYd\\_jQbTY](https://starwarsintrocreator.kassellabs.io/#!/BLqJhgZDtAjYd_jQbTY)

Imagen de la Estrella de la Muerte en la que se activa la aplicación de la introducción. URL: <https://www.amazon.es/Estrella-muerte-Decor-Adhesivo-extra%C3%ADble/dp/B01GXO4JFS>

Archivo de Geogebra que al manipularlo muestra cómo se forman los sólidos de revolución. URL: <https://www.geogebra.org/m/djuehsqs>

Archivo de Geogebra en el que se puede manipular las partes de una esfera. URL: <https://www.geogebra.org/m/jQAcCGDP>

Vídeo que muestra una simulación de la construcción de una estrella de la muerte de Star Wars. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=Zn8b3MDMjQ4>

Archivo de Geogebra que muestra como un plano forma circunferencias al cortar una esfera. URL: <https://www.geogebra.org/m/PVz6HGix>

Imagen de naranjas cortadas en relación con el tema y como medio de activación del recurso de un plano y una circunferencia. URL: <https://entrenosotros.consum.es/naranjas-de-valencia>

Imagen que muestra varios objetos cotidianos con forma cilíndrica. URL: [http://www.cursosinea.conevyt.org.mx/cursos/figymedidas\\_v2/contenidos/u\\_3/u3\\_act40.html](http://www.cursosinea.conevyt.org.mx/cursos/figymedidas_v2/contenidos/u_3/u3_act40.html)

Archivo de Geogebra que muestra las partes de un cilindro y su desarrollo. URL: <https://www.geogebra.org/m/NnN97FSw>

Archivo de Geogebra que al manipularlo muestra las secciones planas que se forman cuando un plano interseca al cilindro. URL: <https://www.geogebra.org/m/gtwf2rcz>

Archivo de Geogebra para manipular un cono intersecado por un plano. URL: <https://www.geogebra.org/m/Z484xYez>

Vídeo que muestra la destrucción de la Estrella de la Muerte, como introducción al foro #1. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=nFwgCgCwtGM>

Vídeo de reflexión de la importancia de cuidar nuestro planeta. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=85kkzcf9qrY>

Imagen de la Estrella de la Muerte con algunos datos, para resolver un problema con una esfera. URL: <https://www.amazon.es/Alientech-Interruptor-habitaci%C3%B3n-decoraci%C3%B3n-iluminaci%C3%B3n/dp/B0777161V2>

Vídeo para reflexionar sobre la importancia de cuidar nuestro planeta para el foro #2. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=85kkzcf9qrY>

Imagen de la madre tierra que activa el vídeo introductorio del foro # 2. URL: <https://www.pinterest.com/pin/500392208569997053/>

- *Actividades;*

**Consigna #1:** Leer el pdf Sólidos de revolución (Esfera y Cilindro).

**Objetivo:** Formalizar los conceptos sobre los elementos y las secciones planas de la esfera y el cilindro.

**Evaluación:** Realización de ejercicios del Trabajo Cotidiano en grupos para resolver ejercicios propuestos en Kahoot!, Rúbrica de habilidades.

**Plazo:** una semana

- *Foro # 1:* Ayuda a Luke Skywalker a destruir la Estrella de la Muerte

Mira la siguiente escena de la Película Star Wars, Episodio IV

Para poder destruir la estrella de la muerte la Alianza tuvo que calcular la distancia que existe desde la entrada de la estrella hasta donde se encuentra el núcleo del planeta.

De acuerdo con los datos que se muestran en la siguiente imagen, determine esa distancia y comente que procedimiento utilizó para encontrarla.

**Objetivo:** Introducir el tema de sólidos de revolución.

**Plazo:** Una semana.

*Foro # 2: ¿Será necesario construir otro planeta o podemos cuidar el que tenemos?*

Observa el siguiente vídeo

Nuestro planeta es la Estrella de la Vida.

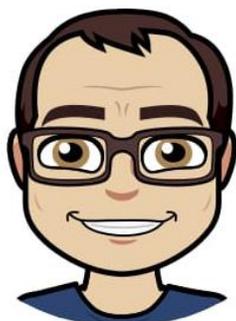
¿Qué acciones concretas podrías empezar a hacer para cuidar de mejor manera nuestra Estrella de la Vida? Comenta con tus compañeros.

**Objetivo:** Concienciar acerca de la importancia de cuidar nuestro planeta.

**Plazo:** Una semana.

## 4. Redacción de las clases

### CLASE # 1



*√ictor Hugo Cortés Vargas*

## LA CIRCUNFERENCIA UN ANILLO QUE GOBIERNA NUESTRO ENTORNO



Hola a todos. Bienvenidos al increíble y fascinante mundo de las matemáticas.

Esta semana nos toca empezar el estudio de la unidad de Geometría, correspondiente al nivel de décimo año. Particularmente esta semana nos adentraremos en la Geometría Analítica en el tema de la circunferencia.

En la trilogía de “El Señor de los anillos”, basada en la novela del escritor J.R.R Tolkien, se plantea la creación de un anillo mágico que fue creado para “gobernarlos a todos”, como se muestra en la siguiente escena de la película

<https://www.youtube.com/watch?v=5JHnZHbzlyk&t=24s>

Así como en esta película se crea “un anillo para gobernarlos a todos”, en nuestro entorno existe una figura que ha tenido fascinada a la humanidad durante siglos y que podrías decir que es el anillo que gobierna nuestro entorno.

Por supuesto que nos referimos a la circunferencia. Desde experiencias como la invención de la rueda, el uso del anillo de matrimonio como símbolo de infinitud en algunas culturas, hasta el descubrimiento del número  $\pi$  (pi) y todas sus implicaciones, han marcado la historia de la humanidad dejándonos una huella circular permanente.



Por esto, es que echaremos mano de la Geometría Analítica con el Plano Cartesiano y del Álgebra para realizar un análisis de las características más importantes que presenta la circunferencia.

Iniciaremos analizando la relación que tiene la circunferencia con un punto, para ello analizaremos una situación de la vida cotidiana, muy pertinente en nuestro país y que nos permitirá entender esta relación entre un punto y la circunferencia.

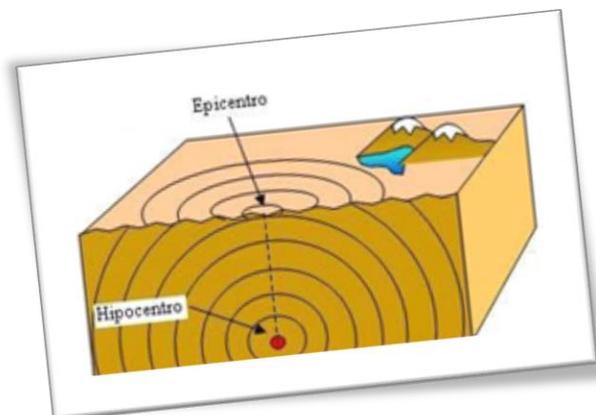
## Ondas sísmicas y la circunferencia

Si arrojamos una piedra a un lago se producen unas ondas que se propagan desde el punto donde cae la piedra. Lo mismo ocurre al romper un objeto se producen ondas sonoras que se desplazan por el aire.

De igual forma sucede cuando se produce un terremoto; al romperse la roca se generan ondas que se propagan a través de la Tierra, tanto en el interior como en la superficie, tal como en el siguiente vídeo

<https://www.youtube.com/watch?v=qWxHoVXnAjM>

Como se muestra en el vídeo, las ondas sísmicas se expanden de forma circular desde un centro que, en el caso de las ondas superficiales, recibe el nombre de Epicentro y desde él es de donde se puede determinar si una zona determinada es o no es afectada por un terremoto.

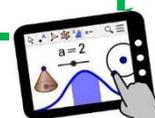


En el foro: *¿Qué pueblo se “salvó” del temblor?* puedes ayudar a Ana que es una venezolana radicada en Costa Rica con los conocimientos que acabas de ver en el vídeo y utilizando algunos elementos básicos de la circunferencia, que fueron estudiados en la clase pasada.

Así como un pueblo determinado puede estar dentro, fuera o en el perímetro de las ondas sísmicas; de igual forma sucede con un punto en relación con la circunferencia. En donde definimos que:

- Si el punto se encuentra dentro de la circunferencia se denomina: **Punto Interior.**
- Si el punto se encuentra fuera de la circunferencia se denomina: **Punto Exterior.**
- Si el punto se encuentra en el borde de la circunferencia se denomina: **Punto Pertenece a la circunferencia.**

*Toca la imagen y podrás observar la relación entre el radio de una circunferencia y la distancia entre dos puntos.*



<https://www.geogebra.org/m/hgCwY28C>

Ahora bien, al igual que en los sismos se toma como punto de referencia el **epicentro** para determinar el rango de alcance del movimiento, en la circunferencia se parte del **centro** para poder determinar en qué posición relativa se encuentra un punto, utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos que se utilizó en noveno año, la medida del radio de la circunferencia, tal como se

**Fórmula de distancia entre dos puntos**

$$d(AB) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

muestra en el documento ***Posición Relativa de Puntos y Rectas con respecto a la Circunferencia***, que forma parte de las lecturas obligatorias de esta semana.

Este análisis geométrico y algebraico de la posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia, también lo podemos realizar con rectas, que forma parte de la temática de esta clase.

## Salió por la tangente

Para empezar con este tema tomaremos como punto de partida una frase de uso popular, nos referimos a “**Se salió por la tangente**”



¿Has pensando qué significa esta frase?

¿Sabías que este dicho popular tiene su origen en un principio matemático?

Esta frase se utiliza cuando un grupo de personas está hablando de un tema y de repente uno de los individuos cambia el tema de conversación, pero: ¿Qué tiene eso que ver con las matemáticas?, si tocas la siguiente imagen y podrás ver un vídeo que explica la relación que existe.

<https://www.youtube.com/watch?v=idUl8k8YoVA>

Como se muestra en el vídeo cuando una recta y una circunferencia se unen en un sólo punto entonces la recta recibe el nombre de ***Recta Tangente*** y el punto de unión se denomina ***Punto de Tangencia***.

Además de esta, existen otras dos posiciones de la recta con respecto a la circunferencia:

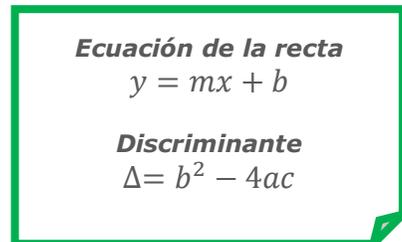
- Si la recta se une con la circunferencia en **dos puntos** se denomina ***Recta Secante***.

Toca la imagen para que puedas observar las diferentes posiciones de una recta con respecto a la circunferencia



- Si la recta no se une **en ningún punto** entonces se denomina **Recta Exterior**.

Todo esto puede ser comprobado por principios geométricos y algebraicos utilizando la **ecuación de la recta** y el **discriminante** de una ecuación de segundo grado que se desarrolló en noveno año, en relación con **la ecuación de la circunferencia** que se estudió en la clase anterior. Según se muestra el documento **Posición Relativa de Puntos y Rectas con respecto a la Circunferencia**.



**Ecuación de la recta**  
 $y = mx + b$

**Discriminante**  
 $\Delta = b^2 - 4ac$

Finalmente, si miras el siguiente vídeo, se muestra un “truco” con la calculadora, para determinar de forma algebraica la posición de una recta con respecto a la circunferencia. Espero que les sea de gran ayuda a la hora de realizar los ejercicios brindados en el **Trabajo Cotidiano #2**, que se realizará en las clases presenciales después de la lectura obligatoria de esta semana.

[https://www.youtube.com/watch?v=AciC1YQ\\_e1k](https://www.youtube.com/watch?v=AciC1YQ_e1k)

Recuerden que en cada clase pueden consultar el apartado de **Recursos** de la plataforma, donde se sube información que complementan las clases de cada semana. Para esta clase pueden consultar: **La circunferencia y el círculo. Matemática 1° ESO y Matemática a tu medida. Material de apoyo para la prueba No.1**

<http://costarica.elmaestroencasa.com/e-books/elmec/bach-a-tu-medida/matematica-a-tu-medida.pdf>

<http://www.edu365.cat/eso/muds/matematicas/edad/eso1/1quincena10/1quincena10.pdf>

También pueden consultar la Unidad Didáctica de Geometría que se encuentra en el apartado de Trabajo en Clase de Classroom.

Seguidamente se nos mostrarán las asignaciones para esta semana:

## ASIGNACIONES

- Descargar y leer ***Posición Relativa de Puntos y Rectas con respecto a la Circunferencia.***
- Realizar el ***Trabajo Cotidiano # 2***, que será entregado por el profesor en las clases presenciales.
- Participar en el foro ***¿Qué pueblo se “salvó” del temblor?***
- Realizar la ***Tarea # 1***. Debe ser enviada en un sólo archivo en formato .ggb a través de la pestaña de tareas de Classroom.

Espero que disfruten la lectura y la realización de las actividades.

Saludos y nos vemos la próxima semana.



Víctor Hugo Cortés Vargas  
CyborgMATH

- **Lectura**

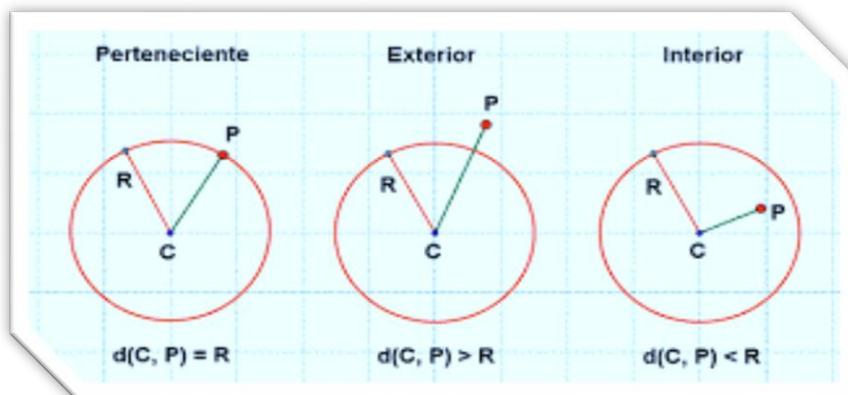
# Posición Relativa de Puntos y Rectas con respecto a la Circunferencia

## 1) Posición relativa entre puntos y la circunferencia

Para determinar la disposición de un punto con respecto a la circunferencia se deben de considerar dos aspectos fundamentales: la distancia entre el centro “**C**” de la circunferencia y el punto en comparación con la longitud del radio. Con esto podemos determinar de manera algebraica las tres posiciones relativas de un punto “**P**” con respecto a la circunferencia:

- Si el radio es **mayor** que la distancia  **$d(C,P)$**  entonces el ***punto es interior.***
- Si el radio es **menor** que la distancia  **$d(C,P)$**  entonces el ***punto es exterior.***

- Si el radio es **igual** que la distancia  $d(C,P)$  entonces **el punto está sobre la circunferencia o pertenece a la circunferencia.**



## Ejemplo

Determine algebraicamente si  $P: (2,0)$  y  $Q: (0,2)$  se ubican en el interior, exterior o pertenecen a la circunferencia con ecuación  $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 32$

**Primero:** Si tenemos que  $C: (4,-3)$  y  $P: (2,0)$  entonces

$$d(C, P) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{13} \approx 3,6$$

Ahora bien, de la ecuación de la circunferencia sabemos que  $r = 4\sqrt{2} \approx 5,65$

Por lo tanto  $r > d(C,P)$ , lo que nos indica que  $P$  se ubica en el interior de la circunferencia.

**Segundo:** Si tenemos que  $C: (4,-3)$  y  $Q: (0,2)$  entonces

$$d(C, Q) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

y como  $r = 4\sqrt{2} \approx 5,65$  entonces  $r < d(C,Q)$

por tanto,  $Q$  se ubica en el exterior de la circunferencia.

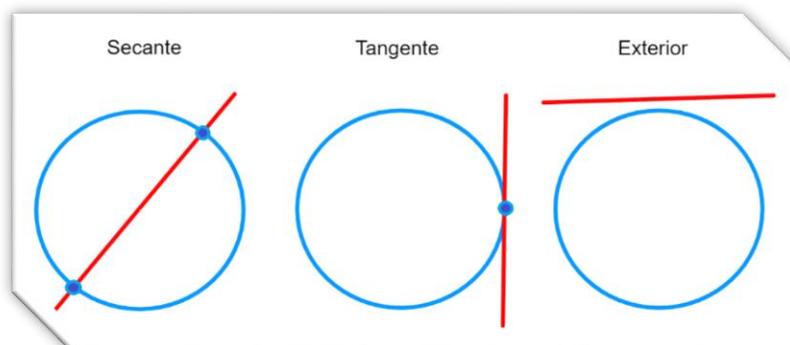
En el siguiente vídeo se muestra, otro método para calcular la posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia con ayuda de la calculadora.

<https://www.youtube.com/watch?v=ny0UrPGsqZQ>

## 2) Posición relativa una recta y la circunferencia

Para determinar la posición relativa de una recta con respecto a la circunferencia nos guiaremos por la cantidad de puntos que tienen en común esas dos figuras. Al igual que en el caso anterior se pueden presentar tres posibilidades:

- **Recta secante**, cuando la recta y la circunferencia se unen en dos puntos.
- **Recta tangente**, cuando la recta y la circunferencia se unen en un punto.
- **Recta exterior**, cuando la recta y la circunferencia no se unen.



Para determinar algebraicamente la cantidad de puntos en los que coincide la recta con la circunferencia, es necesario recordar la ecuación de la recta que se estudió en octavo año  $y = mx + b$

Partiendo de esta fórmula y de la ecuación de la circunferencia, podemos realizar una sustitución de la variable “ $y$ ” por su equivalente en la ecuación de la recta “ $mx+b$ ” como se muestra a continuación.

Ecuación de la circunferencia  $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Ecuación de la recta  $y = mx + b$

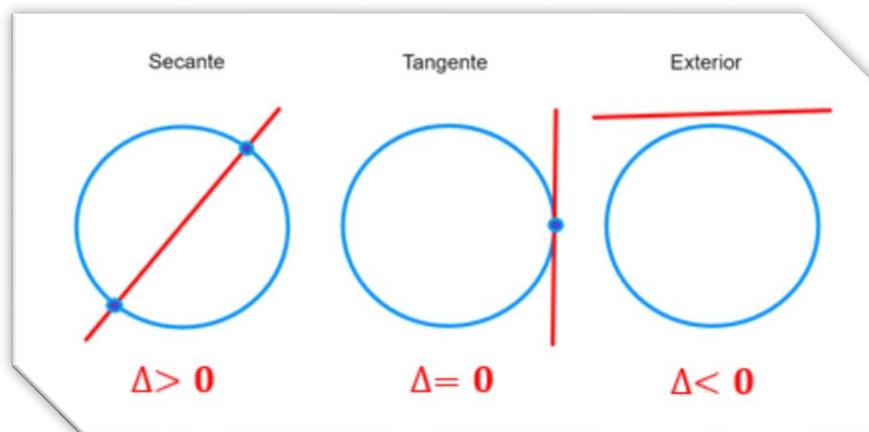
Sustituimos la letra “**y**” por su equivalente en la ecuación de la circunferencia

$$r^2 = (x - h)^2 + (mx + b - k)^2$$

Al resolver esta ecuación se obtendrá una ecuación de segundo grado, como las que se estudiaron en noveno año. A este tipo de ecuación se le puede calcular el **discriminante**  $\Delta = b^2 - 4ac$

De acuerdo con el resultado del discriminante, se puede determinar los puntos comunes entre la recta y la circunferencia de la siguiente forma:

- Si el  $\Delta$  es **positivo**, posee dos puntos en común entonces la recta es secante a la circunferencia.
- Si el  $\Delta$  es **igual a cero**, posee un punto en común entonces la recta es tangente a la circunferencia.
- Si el  $\Delta$  es **negativo**, no poseen ningún punto en común entonces la recta es exterior a la circunferencia.



Este es uno de los métodos que se pueden utilizar para determinar la posición relativa de una recta con respecto a la circunferencia o también se puede utilizar el método que se mostró en el **vídeo** de la clase #1 [https://www.youtube.com/watch?v=AcjC1YQ\\_e1k](https://www.youtube.com/watch?v=AcjC1YQ_e1k) (esta dirección se vuelve a vincular con la palabra vídeo)

Finalmente, en la **Tarea #1** contemplaremos el método gráfico para visualizar estas posiciones relativas en discusión.

## Referencias

F prima Grupo Editorial, (2014). Matemática 10: Hacia la resolución de problemas. F prima Grupo Editorial. Costa Rica

Ramírez, M., (2015). Pendulum 10°: Develando la realidad. Siwo Editorial. Costa Rica.

- **Tarea #1**

¡Hola a tod@s!

La tarea individual de esta semana consiste en determinar la posición relativa la recta con respecto a una circunferencia dada. Grafique la recta y la circunferencia en Geogebra para cada caso y clasifique la recta de acuerdo con lo que se muestra en el gráfico y la teoría estudiada en la clase.

Recta: $y = x$	Recta: $y = 4$	Recta: $y = x$
Circunferencia: $x^2 + y^2 = 4$	Circunferencia: $(x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 1$	Circunferencia: $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$

### Indicaciones:

- La tarea se enviará como archivo adjunto en el apartado de la tarea #1 (fecha: último día de la semana).
- Debe ser enviado en un sólo archivo con formato **.ggb**
- El nombre del archivo de cumplir con la siguiente forma:  
Apellido\_Nombre\_Tarea1.ggb

- Trabajo Cotidiano # 2

## Practiquemos lo aprendido

A) En cada caso, se le da información sobre una circunferencia y una recta.

Determine si la recta es secante, tangente o exterior a la circunferencia dada.

- 1) C:  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$       Recta:  $y = 2x - 10$
- 2) C:  $x^2 + y^2 = 4$       Recta:  $y = -2x + 2y = 0$
- 3) Centro  $(-3,2)$  y  $r = \sqrt{13}$       Recta:  $3y = 2x$
- 4) C:  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$       Recta:  $y = 1 - x$
- 5) C:  $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$       Recta:  $y = \frac{x}{2} + 3$
- 6) C:  $(x - 1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$       Recta:  $y = 0$
- 7) Centro  $(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2})$  y  $r = \sqrt{2}$       Recta:  $y = 1$

B) En cada caso, determine si el punto P pertenece a la circunferencia, o bien si está en el interior o exterior de esta, utilizando uno de los métodos estudiados.

- 1) Ecuación de la circunferencia:  $x^2 + y^2 = 8$ . P (2,3)
- 2) Ecuación de la circunferencia:  $x^2 + y^2 = 8$ . P (-2,-2)
- 3) Ecuación de la circunferencia:  $x^2 + (y + 2)^2 = 12$ . P (1,-2)
- 4) Ecuación de la circunferencia:  $x^2 + (y + 2)^2 = 12$ . P (4,0)
- 5) Circunferencia de centro  $(-3,5)$  y radio 3. P (-6,5)
- 6) Circunferencia de centro  $(-3,5)$  y radio 3. P (-5,2)
- 7) Los extremos de un diámetro son los puntos  $(-3,3)$ ,  $(3,7)$ . P (-2,8)
- 8) Los extremos de un diámetro son los puntos  $(-3,3)$ ,  $(3,7)$ . P (1,8)

- **Foro: ¿Qué pueblo se “salvó” del temblor?**

¡Hola a tod@s! Los invito a analizar la siguiente situación:

Ana es una inmigrante venezolana que reside en Costa Rica. Mientras desayuna le gusta leer un diario y se encuentra el siguiente titular:

“Un sismo de 7.3 grados de magnitud, sacudió la costa norte de Venezuela. Su epicentro fue en la zona de Yaguaraparo, en el estado Sucre. Se pudo sentir en gran parte del país, incluyendo también partes de Colombia, Trinidad y Tobago y Barbados. El Centro de Alerta de Tsunamis del Pacífico emitió una alerta de maremoto para un radio de 300 kilómetros a la redonda del epicentro”

Ana se preocupa, porque tiene familiares en Caracas Venezuela y en Puerto España de Trinidad y Tobago.



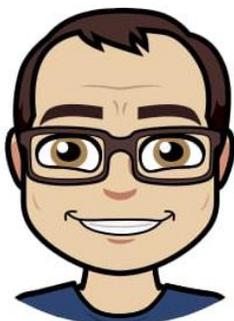
**Indicaciones:**

Para participar en el foro es necesario seguir las siguientes recomendaciones:

- Lee atentamente la consigna del foro.
- Escribe y justifica tu respuesta a la consigna del foro.

- Al pasar algunos días ingresa nuevamente al foro, lee atentamente todas las participaciones de tus compañeros y opina sobre las diferencias que encuentres.
- La participación en el foro es obligatoria y deberás realizar al menos dos intervenciones.
- Organiza tu participación de forma que tengas chance para realizar las dos intervenciones que se te piden en el foro.
- Te recomiendo que realices tu intervención antes de finalizar la primer semana, para que en la última semana puedan discutir las diferencias.

## CLASE # 2



*√ictor Hugo Cortés Vargas*

## DIVIDE Y VENCERÁS

Hola a todos. Bienvenidos al increíble y fascinante mundo de las matemáticas.

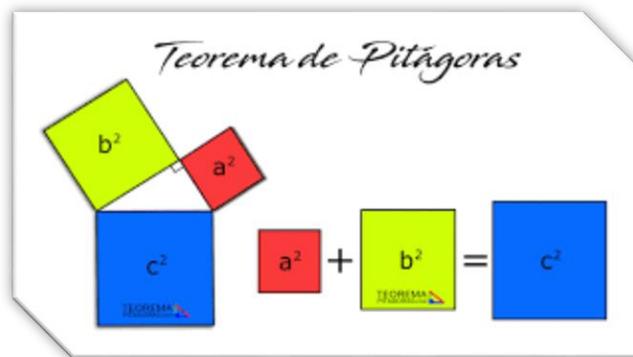
Esta semana continuaremos el estudio de los polígonos, específicamente los irregulares, sus áreas y perímetros. Además, aprenderemos un método que nos permite calcular el área bajo una curva y daremos un paseo por la historia de algunos matemáticos importantes.

Si te gustan los rompecabezas esta es tu semana.

Para introducir esta clase visualizaremos una demostración geométrica de un viejo conocido, el famoso **Teorema de Pitágoras**, recordemos lo que dice:

**En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.**

Toca la siguiente imagen y encontrarás un rompecabezas que podrás manipular para demostrar este teorema de forma geométrica.



<https://www.geogebra.org/m/QptkEwBS>

## 1) Áreas y perímetros de polígonos irregulares

En esta demostración del Teorema de Pitágoras podemos notar que para rellenar el cuadrado de la hipotenusa utilizamos cinco cuadriláteros que completan perfectamente la superficie del cuadrado en cuestión.

Ahora bien, de acuerdo con la clase anterior sabemos que el cuadrado es un polígono regular y entonces podemos preguntarnos

**¿Se puede utilizar esta estrategia con los polígonos irregulares?**



Para contestar esta pregunta recurriremos a otro rompecabezas, conocido como **Tangrama**. Toca la siguiente imagen y realiza al menos tres de los rompecabezas que se proponen en esta actividad

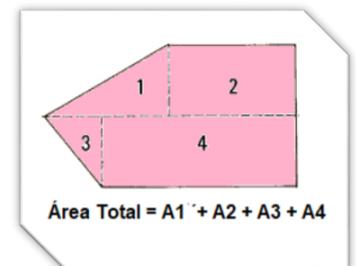
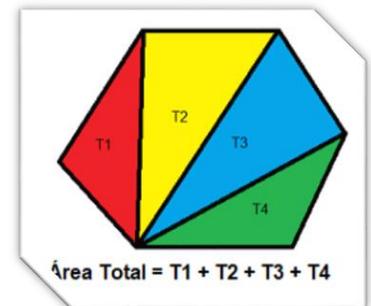


El **Tangrama** es un juego chino que significa tabla de la sabiduría. Es un rompecabezas que consiste en usar todas las piezas para construir diferentes formas.

<https://www.geogebra.org/m/EPWU34DE>

Después de jugar un poco con el Tangrama, podemos responder la pregunta que nos hicimos anteriormente, ya que todas las figuras que realizamos en estos rompecabezas son polígonos irregulares y la superficie se pudo rellenar completamente con figuras más pequeñas y más comúnmente conocidas.

Este método de dividir un polígono en triángulos y cuadriláteros conocidos sin perder la forma del polígono original se conoce con el nombre de **Triangulación** y es una de las estrategias más utilizadas para calcular el área de un polígono irregular, de tal manera que al calcular las áreas de cada una de las figuras y sumar los resultados se obtiene el área del polígono en cuestión, como se muestra en las siguientes imágenes



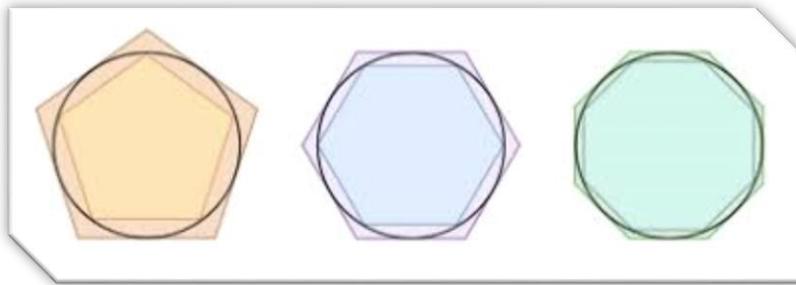
Ahora bien, también podemos calcular el perímetro de estas figuras, recurriendo a la fórmula de distancia entre dos puntos, que estudiamos en noveno año, tal como se muestra en el siguiente vídeo

<https://www.youtube.com/watch?v=2QxZ022KRy0>

## 2) Área bajo la curva

Uno de los mayores dilemas matemáticos de la historia consistió en como aproximar el área de figuras curvas o también llamadas figuras geométricas no poligonales.

Matemáticos como Eudoxo y Arquímedes lograron realizar buenas aproximaciones de las áreas de figuras curvas, como el círculo, con un procedimiento llamado **Método Exhaustivo**, con el cual, mediante las áreas de figuras geométricas más conocidas, como el triángulo y el trapecio se buscaba una aproximación del área de figuras curvas. Si tocas la siguiente figura podrás encontrar una simulación de este método.



[https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_exhaustivo](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_exhaustivo)

Con el auge de la Geometría Analítica y la creación del plano cartesiano el matemático alemán Bernhard Riemann perfecciona este método y logra calcular con mayor precisión el área de una figura curva.

El método utilizado por Riemann consiste en trazar un número finito de rectángulos dentro de un área irregular, calcular el área de cada uno de ellos y sumarlos. Es decir, se dibuja la figura en el plano cartesiano y debajo de la curva se forma un buen número de rectángulos, se determina el área de cada uno de ellos y finalmente se suman esos resultados, lo cual es una aproximación del área de la figura. También se pueden utilizar



otras figuras, como el trapecio, para aplicar este método, tal como se muestra en el siguiente vídeo

[https://www.youtube.com/watch?v=V7penn90\\_m8](https://www.youtube.com/watch?v=V7penn90_m8)

Seguidamente encontrarás una línea del tiempo, en donde podrás observar algunos datos interesantes sobre la evolución del área bajo la curva y sus principales representantes.

[https://cdn.knightlab.com/libs/timeline3/latest/embed/index.html?source=1RrI9Wi9kIT E- a\\_CVCDy37ICuV0Teec7YIiGHsgBk2gI&font=Default&lang=en&initial\\_zoom=2&height=650](https://cdn.knightlab.com/libs/timeline3/latest/embed/index.html?source=1RrI9Wi9kIT E- a_CVCDy37ICuV0Teec7YIiGHsgBk2gI&font=Default&lang=en&initial_zoom=2&height=650)

Además, pueden consultar el apartado de **Recursos** de la plataforma, para consultar los materiales de consulta de esta semana: **Área de un polígono irregular, Matemática a tu medida. Material de apoyo para la prueba No.1,**

<http://costarica.elmaestroencasa.com/e-books/elmec/bach-a-tu-medida/matematica-a-tu-medida.pdf>

<https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/area-poligono-irregular/>

También pueden consultar la Unidad Didáctica de Geometría que se encuentra en el apartado de Trabajo en Clase de **Classroom**.

Seguidamente se nos mostrarán las asignaciones para esta semana:

### ASIGNACIONES

- Descargar y leer el pdf **Áreas y Perímetros de polígonos irregulares y curvas**
- Realizar de un **Trabajo Colaborativo** en Google Forms, que se realizará de forma grupal en las clases presenciales y será facilitado por el profesor.
- Participar en el foro **Montaña Rusa**.

Espero que disfruten la lectura y la realización de las actividades.



Víctor Hugo Cortés Vargas  
CyborgMATH

- Lectura

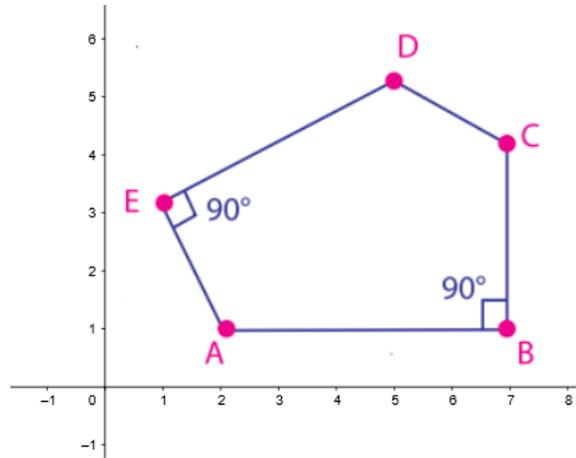
## Áreas y perímetros de polígonos irregulares y curvas

### 1) Área y perímetro de un polígono irregular

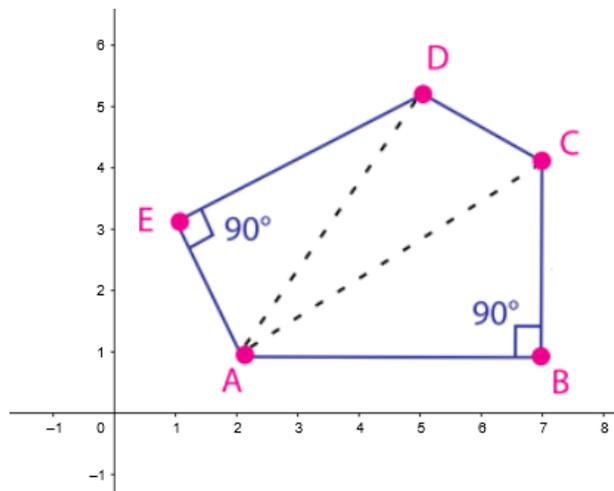
El cálculo del área de un polígono irregular requiere de métodos alternativos de cálculo de áreas. El método más común es la **Triangulación** que consiste en dividir el polígono en figuras más sencillas y conocidas. En el caso de perímetro de un polígono y regular se obtiene al sumar la medida de los lados de la figura, para ello en algunas ocasiones será necesario utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos:  $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ . En el siguiente ejemplo se muestra una estrategia para obtener tanto el área como el perímetro de un polígono irregular.

## Ejemplo

Calcule el perímetro y el área del polígono irregular adjunto.



**Primero:** Descomponemos el polígono irregular en triángulos en los que se conozca la medida de sus lados o se puedan averiguar.



**Segundo:** Calculamos la longitud de cada lado de los siguientes triángulos con las medidas de los ejes del plano y la fórmula de distancia entre dos puntos para los lados AC, AD, AE, DE y DC

$\triangle ABC$

Tenemos que  $AB = 5$ ,  $BC = 3$

$$AC = \sqrt{34}$$

Además

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$\triangle ADE$

Tenemos que  $AE = \sqrt{5}$ ,  $DE = 2\sqrt{5}$

$$AD = 5$$

Además

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$\triangle ACD$

Tenemos que  $CD = \sqrt{5}$ ,  $AD = 5$

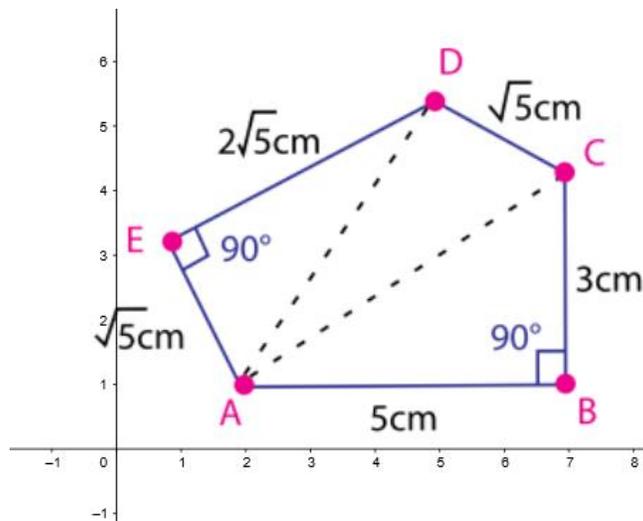
$$AD = \sqrt{34}$$

Además, por fórmula de Herón

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A \approx 5,5$$

**Tercero:** El perímetro del polígono se calcula haciendo la suma de los lados y el área se calcula sumando las áreas de cada triángulo.



$$P = 5 + 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 8 + 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$A = \frac{15}{2} + \sqrt{5} + 5,5 \approx 15,23 \text{ cm}^2$$

Si tocas la siguiente imagen podrás ver un vídeo que muestra la Triangulación de un polígono irregular por medio de figuras diferentes.



<https://www.youtube.com/watch?v=KkZxpcIIInc>

## 1) Área bajo la curva

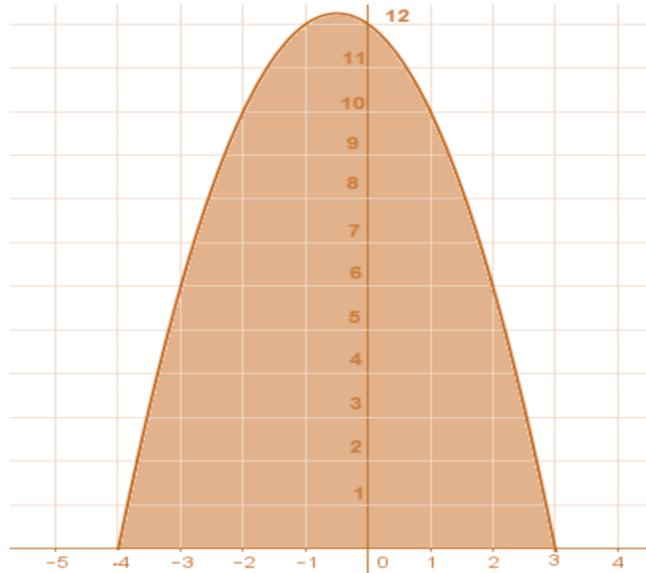
En nuestro entorno, existen muchas formas curvas, cuyas áreas no pueden ser calculadas con una fórmula geométrica específica.



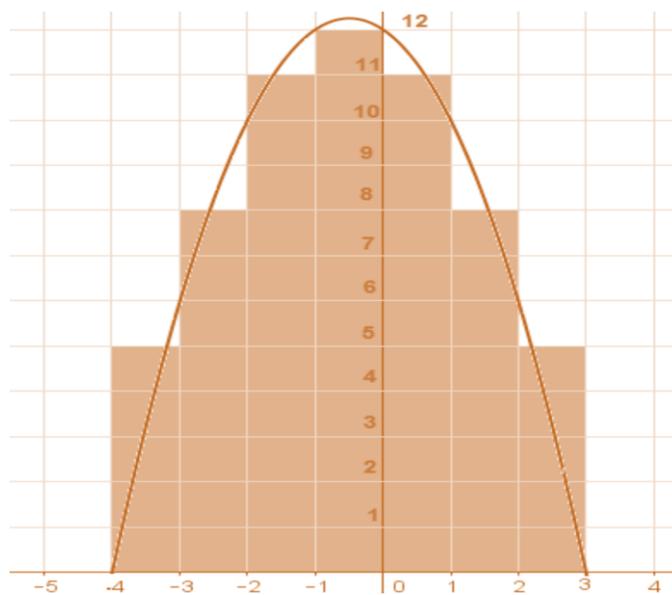
Uno de los métodos usados desde hace varios siglos, para determinar el área de una figura curva representada en el plano cartesiano, es dividirla en varios rectángulos u otras figuras cuya área puede ser calculada más fácilmente y sumar todos los resultados de esas áreas, con lo que se obtiene una muy buena aproximación del área bajo la curva. Veamos un ejemplo

## Ejemplo

Calcule el área aproximada de la parábola dada por  $y = -x^2 - x + 12$



Una manera de aproximar el área de esta figura, es construyendo rectángulos.

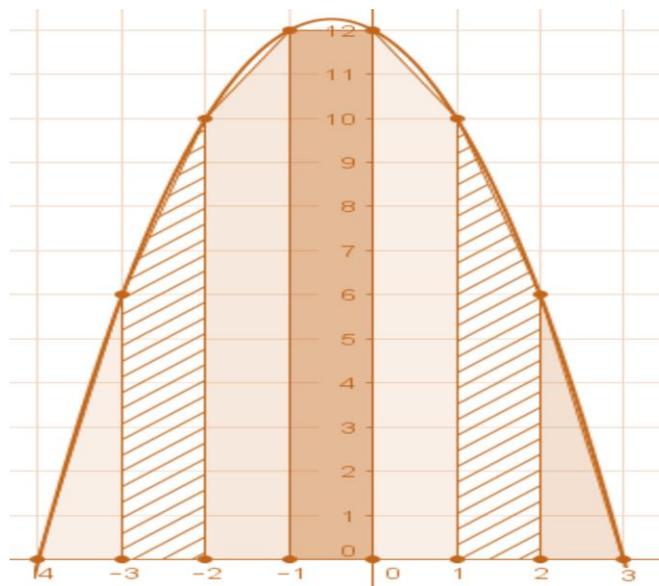


Algunas partes de esos rectángulos sobrepasarán la figura y en otros casos, no logran cubrirla. Esas diferencias “compensan”, en cierta forma, de modo que entre más rectángulos se realicen, más buena será la aproximación.

Al contar los cuadros que forman los rectángulos en la figura hay 60 cuadrados de 1 unidad de lado, por lo que el área aproximada es de  $60 \text{ ul}^2$ .

El área exacta de esa figura es de  $57,16 \text{ ul}^2$ , por lo que con rectángulos se obtiene una aproximación.

Ahora bien, realicemos una aproximación con otras figuras



En este caso dividimos el área en dos triángulos, cuatro trapecios y un rectángulo

El área un triángulo es:  $\frac{1 \cdot 6}{2} = 3 \text{ ul}^2$

El área del rectángulo:  $1 \cdot 12 = 12 \text{ ul}^2$

El área de un trapecio “rayado”:  $\frac{(10+6) \cdot 1}{2} = 8 \text{ ul}^2$

El área de uno de los trapecios grandes es de:  $\frac{(12+10) \cdot 1}{2} = 11 \text{ ul}^2$

**El área total:  $3 + 3 + 8 + 8 + 12 + 11 + 11 = 56 \text{ ul}^2$**

Por lo tanto, esta es una mejor aproximación que la obtenida con sólo rectángulos.

## Referencias

F prima Grupo Editorial, (2014). Matemática 10: Hacia la resolución de problemas. F prima Grupo Editorial. Costa Rica

Chavarría, G.(s.f.), Matemática 10: Basado en los nuevos programas del MEP. Costa Rica.

Ramírez, M., (2015). Pendulum 10°: Develando la realidad. Siwo Editorial. Costa Rica.

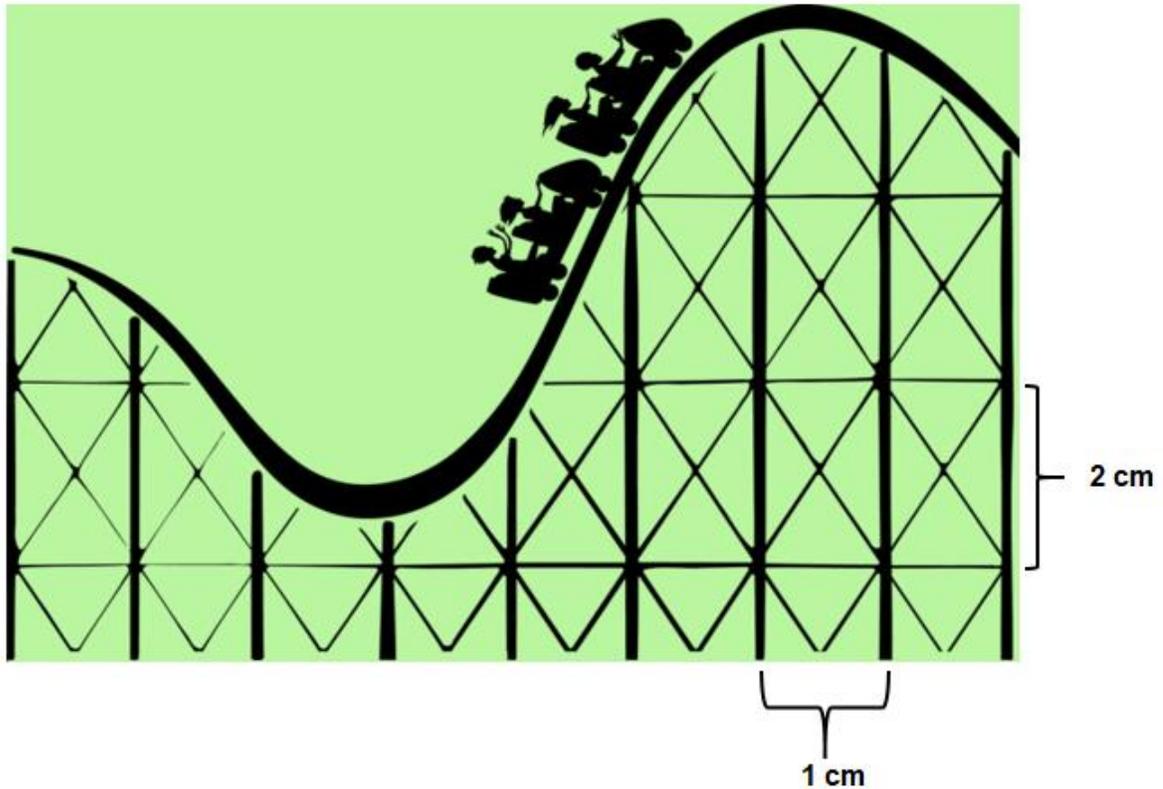
- **Foro (CLASE# 2): Montaña Rusa**

¡Hola a tod@s!

La Montaña Rusa debe su nombre a las diversiones desarrolladas durante el invierno en Rusia, donde existían grandes toboganes de madera que se descendían con trineos deslizables sobre la nieve. Irónicamente, los rusos lo llaman *Amyerikánskiye gorki* (en ruso: *Американские горки*) o "montaña Americana". (Wikipedia)



En la siguiente imagen se muestra un segmento de la montaña rusa, cuyos railes forman una curva. Debajo de esta curva se muestra la estructura que sostiene la montaña rusa y que cubre un área determinada.



Busque un método para determinar el área que cubren los soportes de los railes de la Montaña Rusa que se muestra en la imagen y coméntelo con los compañeros en el foro.

**Indicaciones:**

Para participar en el foro es necesario seguir las siguientes recomendaciones:

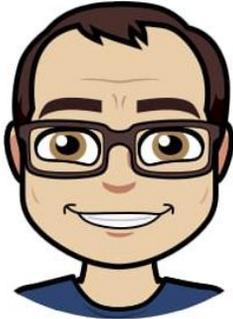
- Lee atentamente la consigna del foro.
- Escribe y justifica tu respuesta a la consigna del foro.

- Al pasar algunos días ingresa nuevamente al foro, lee atentamente todas las participaciones de tus compañeros y opina sobre las diferencias que encuentres.
- La participación en el foro es obligatoria y deberás realizar al menos dos intervenciones.
- Organiza tu participación de forma que tengas chance para realizar las dos intervenciones que se te piden en el foro.
- Te recomiendo que realices tu intervención antes de finalizar la primer semana, para que en la última semana puedan discutir las diferencias.
- 
- **Trabajo Colaborativo**

Trabajo grupal en Google Foms

<https://forms.gle/aB3gnpfqMiDB3kmy8>

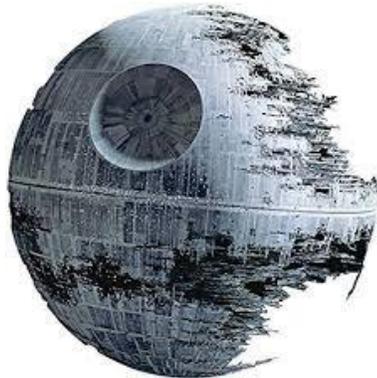
## CLASE # 3



√ *Víctor Hugo Cortés Vargas*

## EL MUNDO SIGUE GIRANDO

Iniciamos esta clase mirando la introducción que se encuentra al tocar la siguiente imagen



[https://starwarsintrocreator.kassellabs.io/#!/BLgJhgZDtAjYd\\_iQbTY](https://starwarsintrocreator.kassellabs.io/#!/BLgJhgZDtAjYd_iQbTY)

Como se expresa en el vídeo, en esta última parte de la unidad, echaremos un vistazo a dos figuras tridimensionales que se conocen como **sólidos de revolución**, porque se generan al girar una figura plana alrededor de una recta. En este caso nos referimos a la **esfera** y al **cilindro circular recto**.

*Toca la imagen y podrás ver un archivo de Geogebra donde se muestra como se generan los Sólidos de Revolución.*

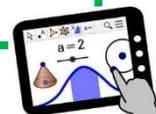


<https://www.geogebra.org/m/djuehsqs>

## 1) La Esfera

La esfera es un cuerpo sólido limitado por una superficie curva formada por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de otro punto interior llamado centro de la esfera.

*Toca la imagen y podrás ver un archivo de Geogebra que muestra los elementos de la esfera.*



Este cuerpo sólido tiene cuatro elementos fundamentales: el **centro**, el **radio**, la **cuerda** y el **diámetro**.

<https://www.geogebra.org/m/jQAcCGDP>

En la vida cotidiana podemos encontrar una gran cantidad de objetos que tiene una forma esférica, uno de los más famosos es la Estrella de la Muerte de la saga de la Guerra de la Galaxias, que fue el objeto de estudio del problema que tratamos de resolver en el Foro #1 de esta clase. En la siguiente imagen encontrarás un interesante vídeo que muestra la simulación de construcción de una Estrella de la Muerte.

<https://www.youtube.com/watch?v=Zn8b3MDMiQ4>

### 1.1) Secciones planas en la esfera

Una esfera puede ser intersecada por un plano, como cuando un cuchillo (que sería como el plano) corta una naranja. En estos casos, no importa la forma como el plano interseque la esfera (no importa la forma como el cuchillo corte la naranja) siempre se forma una circunferencia. La esfera es la única figura que



cumple esta propiedad. Si tocas la imagen de la derecha podrás observar como un plano forma circunferencias en la esfera.

<https://www.geogebra.org/m/PVz6HGix>

## 2) El Cilindro Circular Recto

El cilindro es una figura que, al igual que la esfera, se encuentra en muchos objetos de la vida cotidiana.

Un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de una región rectangular en torno a uno de sus lados.

Si tomamos un cilindro y lo “abrimos” podremos observar mejor las figuras geométricas planas que lo conforman. En él encontraremos dos círculos que se denominan **bases** del cilindro y una región rectangular que se le denomina **superficie lateral**.

Además, la distancia entre las bases es la **altura** del cilindro.

<https://www.geogebra.org/m/NnN97FSw>

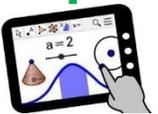


*Toca la imagen para que puedas intersecar un plano con un cilindro y observar las tres figuras que se forman.*

### 2.1) Secciones planas del cilindro

Al igual que con la esfera podemos intersecar un cilindro con un plano, con la diferencia que en este caso dependiendo de la posición del plano se pueden obtener tres figuras geométricas diferentes: circunferencia, rectángulo y elipse. <https://www.geogebra.org/m/gtwf2rcz>

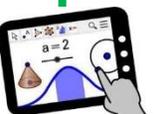
*Toca la imagen y podrás ver un archivo de Geogebra que muestra las partes del cilindro.*



### 2.2) ¿Qué es una elipse?

En el programa de secundaria es la primera vez que se menciona esta figura, que se genera cuando un plano corta un cilindro de forma oblicua, es decir que el plano

*Toca la imagen para que veas el resultado de intersecar un cono con un plano oblicuo.*



no se encuentra ni en posición vertical ni horizontal, más bien es una posición intermedia entre ellas. <https://www.geogebra.org/m/Z484xYez>

La Elipse es una figura geométrica curva y cerrada que resulta de cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo, y que tiene la forma de un círculo achatado (Wikipedia).

Finalmente, les recomiendo que antes de realizar el Foro #2 de esta semana lean el artículo: ***¿Y si la estrella de la muerte fue la ciudad inteligente del futuro?***, que hace una interesante reflexión sobre los necesidades actuales y futuras de la humanidad y nuestro planeta.

Pueden consultar el apartado de **Recursos** de la plataforma, donde se sube información que complementan las clases de cada semana.

También, pueden consultar la Unidad Didáctica de Geometría que se encuentra en el apartado de Trabajo en Clase de Classroom.

Seguidamente se nos mostrarán las asignaciones para esta semana:

### ASIGNACIONES

- Descargar y leer: ***Sólidos de revolución (Esfera y Cilindro)***.
- Descargar y leer, antes de realizar el Foro # 2: ***¿Y si la estrella de la muerte fue la ciudad inteligente del futuro?***
- Realizar el **Trabajo Cotidiano**, que será entregado por el profesor en las clases presenciales.
- Participar en el Foro #1: ***Ayuda a Luke Skywalker a destruir la Estrella de la Muerte.***
- Participar en el Foro #2: ***¿Será necesario construir otro planeta o podemos cuidar el que tenemos?***

Espero que disfruten la lectura y la realización de las actividades.

Saludos y nos vemos la próxima semana.



Víctor Hugo Cortés Vargas  
CyborgMATH

- **Lectura**

## Sólidos de Revolución (Esfera y Cilindro)

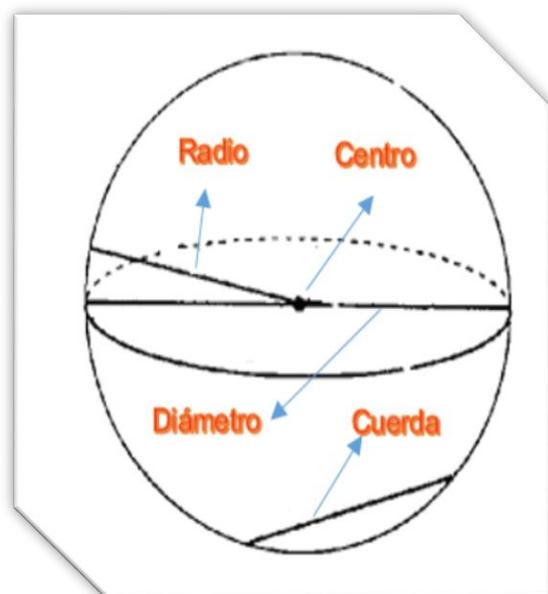
### 1) Esfera

La esfera es un cuerpo sólido limitado por una superficie curva formada por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de otro punto interior llamado centro de la esfera.

#### 1.1) Partes de la esfera

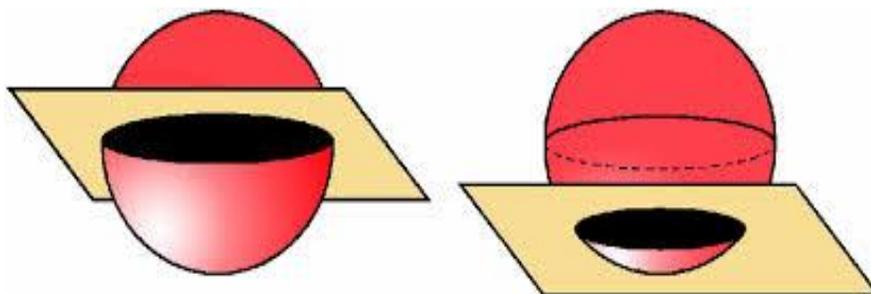
La esfera tiene varios elementos que se enuncian a continuación:

- **Centro:** Punto interior que equidista (se encuentra a la misma distancia) de cualquier punto de la esfera.
- **Radio:** Segmento que une el centro con un punto de la esfera.
- **Cuerda:** Segmento que une dos puntos de la superficie esférica.
- **Diámetro:** Cuerda que pasa por el centro de la esfera, equivale a dos radios.

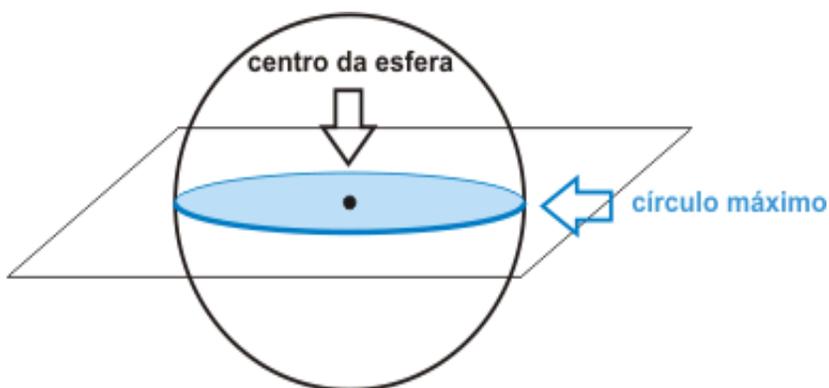


## 1.2) Secciones planas que se forman en la esfera

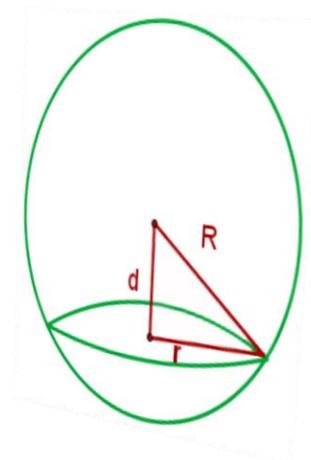
Una esfera puede ser intersecada por un plano y sin importar la posición del plano, siempre se forma una circunferencia.



Si el plano pasa por el centro de la esfera, el radio de la circunferencia que se forma es el mismo de la esfera y a esta figura se le llama **Círculo Máximo**.



Además, si formamos un triángulo rectángulo con el radio de la circunferencia, el radio de la esfera y la distancia entre el centro de la circunferencia y el centro de la esfera, podemos calcular la medida de estos segmentos por medio del **Teorema de Pitágoras**.



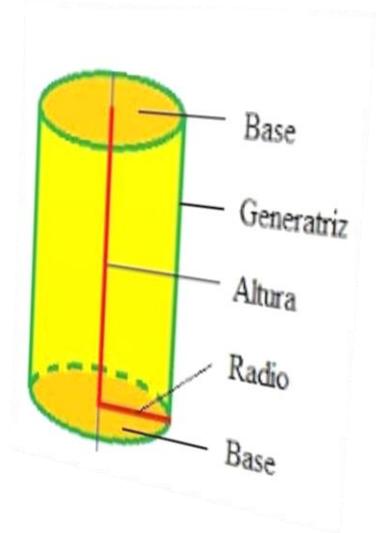
## 2) Cilindro circular recto

Un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de una región rectangular en torno a uno de sus lados.

### 2.1 Partes del cilindro

Si tomamos un cilindro y lo “abrimos” podremos observar mejor las figuras geométricas planas que lo conforman. En él encontraremos dos círculos que se denominan **bases** del cilindro y una región rectangular que se le denomina **superficie lateral**.

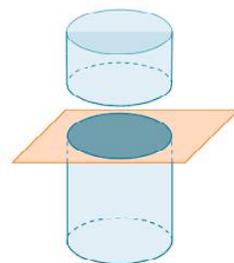
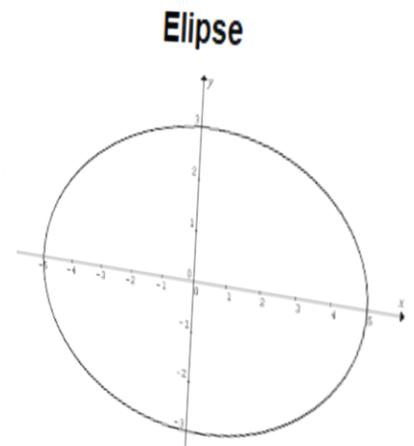
Además, la distancia entre las bases es la **altura** del cilindro y el segmento de la superficie lateral y que es congruente (de igual medida) que la altura se denomina **generatriz**.



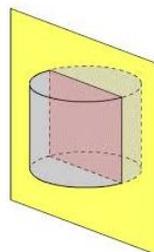
### 2.2) Secciones planas que se forman en el cilindro

Al igual que con la esfera podemos intersecar un cilindro con un plano, con la diferencia que en este caso dependiendo de la posición del plano se obtienen varias figuras geométricas.

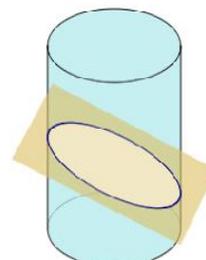
- Si el plano es paralelo a las bases del cilindro se genera una **circunferencia**.
- Si el plano es perpendicular (forma  $90^\circ$ ) a las bases se genera un **rectángulo**.
- Si el plano es oblicuo (que no forma ángulo de  $90^\circ$ ) a las bases del cilindro se genera una **elipse**.



Circunferencia



Rectángulo



Elipse

## Referencias

F prima Grupo Editorial, (2014). Matemática 10: Hacia la resolución de problemas. F prima Grupo Editorial. Costa Rica

Ramírez, M., (2015). Pendulum 10°: Develando la realidad. Siwo Editorial. Costa Rica.

- **Trabajo cotidiano colaborativo**

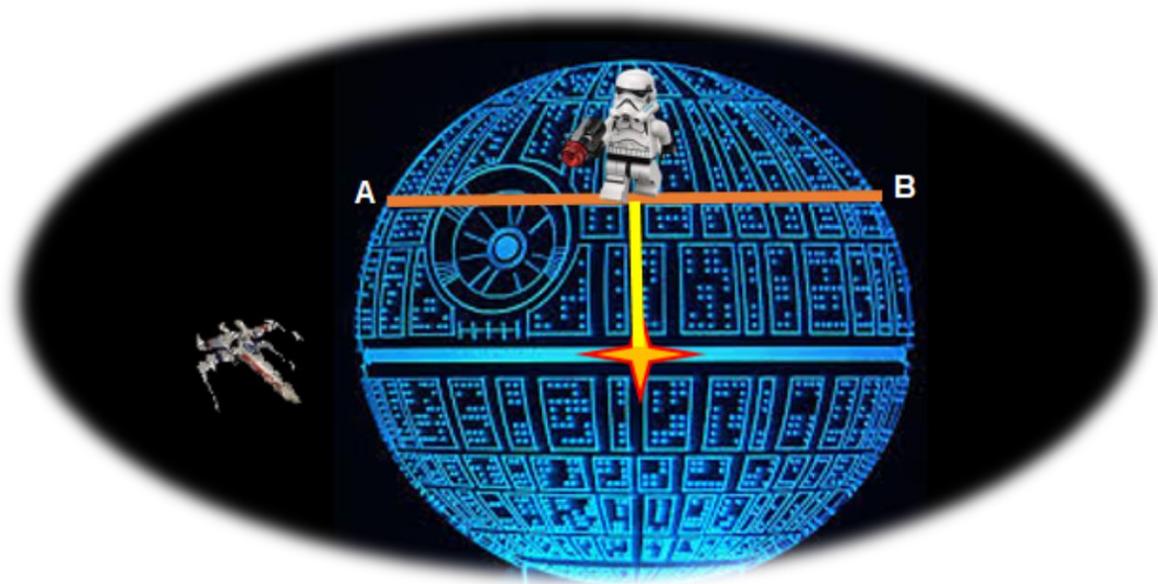
<https://create.kahoot.it/share/solidos-de-revolucion/473ab391-8626-41b4-90b8-c9f123b79145>

- **Foro 1 (CLASE #3): Ayuda a Luke Skywalker a destruir la Estrella de la Muerte**

Mira la siguiente escena de la Película Star Wars, Episodio IV

<https://www.youtube.com/watch?v=nFwqCgCwtGM>

Para poder destruir la Estrella de la Muerte, la Alianza tuvo que calcular la distancia que existe desde la entrada de la estrella hasta donde se encuentra el núcleo del planeta.



De acuerdo con la imagen anterior, si la longitud de la plataforma  $\overline{AB} = 120 \text{ m}$  y la distancia del Stormtrooper al núcleo de la estrella es de 11 m. Determine la distancia que debe recorrer la nave de Luke para poder destruir el planeta.

**Indicaciones:**

Para participar en el foro es necesario seguir las siguientes recomendaciones:

- Lee atentamente la consigna del foro.
  - Escribe y justifica tu respuesta a la consigna del foro.
  - Al pasar algunos días ingresa nuevamente al foro, lee atentamente todas las participaciones de tus compañeros y opina sobre las diferencias que encuentres.
  - La participación en el foro es obligatoria y deberás realizar al menos dos intervenciones.
  - Organiza tu participación de forma que tengas chance para realizar las dos intervenciones que se te piden en el foro.
  - Te recomiendo que realices tu intervención antes de finalizar la primer semana, para que en la última semana puedan discutir las diferencias.
- **Foro 2 (CLASE #3): *¿Será necesario construir otro planeta o podemos cuidar el que tenemos?***

Observa el siguiente vídeo

<https://www.youtube.com/watch?v=85kkzcf9qrY>

Nuestro planeta es la Estrella de la Vida.

¿Qué acciones concretas podrías empezar a hacer para cuidar de mejor manera nuestra Estrella de la Vida? Comenta con tus compañeros.

**Indicaciones:**

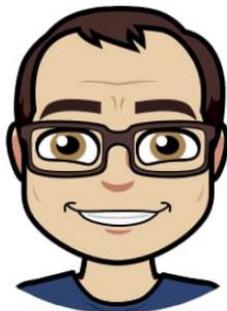
Para participar en el foro es necesario seguir las siguientes recomendaciones:

- Lee atentamente la consigna del foro.
- Escribe y justifica tu respuesta a la consigna del foro.
- Al pasar algunos días ingresa nuevamente al foro, lee atentamente todas las participaciones de tus compañeros y opina sobre las diferencias que encuentres.
- La participación en el foro es obligatoria y deberás realizar al menos dos intervenciones.
- Organiza tu participación de forma que tengas chance para realizar las dos intervenciones que se te piden en el foro.
- Te recomiendo que realices tu intervención antes de finalizar la primer semana, para que en la última semana puedan discutir las diferencias.

## 5. Captura de pantalla de las clases



# Clase # 1



*Víctor Hugo Cortés Vargas*

## LA CIRCUNFERENCIA UN ANILLO QUE GOBIERNA NUESTRO ENTORNO



Hola a tod@s. ¡Bienvenid@s al increíble y fascinante mundo de las matemáticas!

Esta semana nos toca empezar el estudio de la unidad de Geometría, correspondiente al nivel de décimo año. Particularmente esta semana nos adentraremos en la Geometría Analítica en el tema de la circunferencia.

En la trilogía de “El Señor de los anillos”, basada en la novela del escritor J.R.R Tolkien, se plantea la creación de un anillo mágico que fue creado para “gobernarlos a todos”, como se muestra en la siguiente escena de la película,



Así como en esta película se crea “un anillo para gobernarlos a todos”, en nuestro entorno existe una figura que ha tenido fascinada a la humanidad durante siglos y que podrías decir que es el anillo que gobierna nuestro entorno.

Por supuesto que nos referimos a la circunferencia. Desde experiencias como la invención de la rueda, el uso del anillo de matrimonio como símbolo de infinitud en algunas culturas, hasta el descubrimiento del número pi y todas sus implicaciones, han marcado la historia de la humanidad dejándonos una huella circular permanente.

Por esto, es que echaremos mano de la Geometría Analítica con el Plano Cartesiano y del Álgebra para realizar un análisis de las características más importantes que presenta la circunferencia.

Iniciaremos analizando la relación que tiene la circunferencia con un punto, para ello analizaremos una situación de la vida cotidiana, muy pertinente en nuestro país y que nos permitirá entender esta relación entre un punto y la circunferencia.



## Ondas sísmicas y la circunferencia

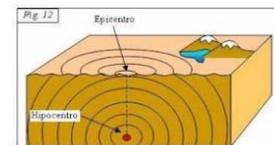
Si arrojamamos una piedra a un lago se producen unas ondas que se propagan desde el punto donde cae la piedra. Lo mismo ocurre al romper un objeto se producen ondas sonoras que se desplazan por el aire.

De igual forma sucede cuando se produce un terremoto; al romperse la roca se generan ondas que se propagan a través de la Tierra, tanto en el interior como en la superficie, tal como se muestra en el siguiente vídeo



Como se muestra en el vídeo, las ondas sísmicas se expanden de forma circular desde un centro que, en el caso de las ondas superficiales, recibe el nombre de Epicentro y desde él es de donde se puede determinar si una zona determinada es o no es afectada por un terremoto.

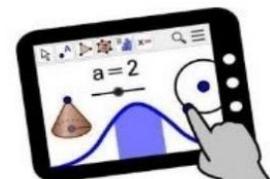
En el foro: *¿Qué pueblo se “salvó” del temblor?*, puedes ayudar a Ana que es una venezolana radicada en Costa Rica con los conocimientos que acabas de ver en el vídeo y utilizando algunos elementos básicos de la circunferencia, que fueren estudiados en la clase pasada.



Así como un pueblo determinado puede estar dentro, fuera o en el perímetro de las ondas sísmicas; de igual forma sucede con un punto en relación con la circunferencia. En donde definimos que:

- Si el punto se encuentra dentro de la circunferencia se denomina: **Punto Interior.**
- Si el punto se encuentra fuera de la circunferencia se denomina: **Punto Exterior.**
- Si el punto se encuentra en el borde de la circunferencia se denomina: **Punto Pertenece a la circunferencia.**

Toca la imagen y podrás observar la relación entre el radio de una circunferencia y la distancia entre dos puntos



Ahora bien, al igual que en los sismos se toma como punto de referencia el **epicentro** para determinar el rango de alcance del movimiento, en la circunferencia se parte del **centro** para poder determinar en qué posición relativa se encuentra un punto, utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos que se utilizó en noveno año, la medida del radio de la circunferencia, tal como se muestra en el documento ***Posición Relativa de Puntos y Rectas con respecto a la Circunferencia***, que forma parte de las lecturas obligatorias de esta semana.

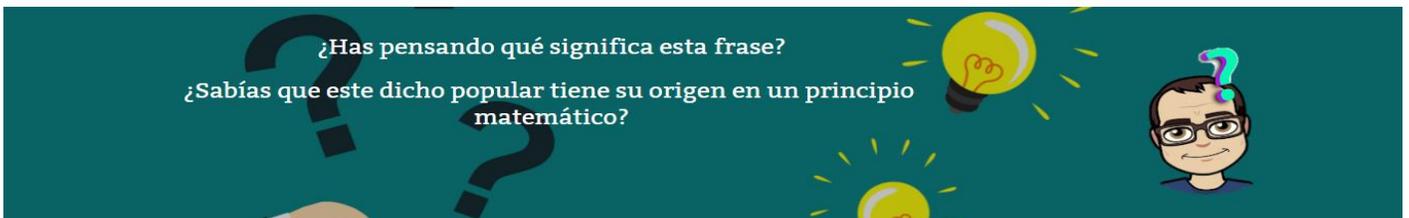
$$d(AB) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Fórmula de distancia entre dos puntos

Este análisis geométrico y algebraico de la posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia, también lo podemos realizar con rectas, que forma parte de la temática de esta clase.

## Salió por la tangente

Para empezar con este tema tomaremos como punto de partida una frase de uso popular, nos referimos a **“Se salió por la tangente”**



Esta frase se utiliza cuando un grupo de personas está hablando de un tema y de repente un de los individuos cambia el tema de conversación, pero: ¿Qué tiene eso que ver con las matemáticas?, en el siguiente vídeo se explica la relación que existe

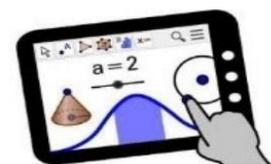


Como se muestra en el vídeo cuando una recta y una circunferencia se unen en un sólo punto entonces la recta recibe el nombre de **Recta Tangente** y el punto de unión se denomina **Punto de Tangencia**.

Además de esta, existen otras dos posiciones de la recta con respecto a la circunferencia:

- Si la recta se une con la circunferencia en **dos puntos** se denomina **Recta Secante**.
- Si la recta no se une **en ningún punto** entonces se denomina **Recta Exterior**.

*Toca la imagen para que puedas observar las diferentes posiciones de una recta con respecto a la circunferencia*



Todo esto puede ser comprobado por principios geométricos y algebraicos utilizando la **ecuación de la recta** y **el discriminante** de una ecuación de segundo grado que se desarrolló en noveno año, en relación con **la ecuación de la circunferencia** que se estudió en la clase anterior. Según se muestra el documento **Posición Relativa de Puntos y Rectas con respecto a la Circunferencia**.

Finalmente, en el siguiente vídeo donde se muestra un “truco” con la calculadora, para determinar de forma algebraica la posición de una recta con respecto a la circunferencia. Espero que les sea de gran ayuda a la hora de realizar los ejercicios brindados en el **Trabajo Cotidiano #2**, que se realizará en las clases presenciales después de la lectura obligatoria de esta semana.

$$\text{Ecuación de la recta} \\ y = mx + b$$

$$\text{Discriminante} \\ \Delta = b^2 - 4ac$$



Recuerden que en cada clase pueden consultar el apartado de **Recursos** de la plataforma, donde se sube información que complementan las clases de cada semana. Para esta clase pueden consultar: **La circunferencia y el círculo**, **Matemática 1° ESO** y **Matemática a tu medida**, **Material de apoyo para la prueba No.1**

También pueden consultar la Unidad Didáctica de Geometría que se encuentra en el apartado de Trabajo en Clase de Classroom.

Seguidamente se nos mostrarán las asignaciones para esta semana:

## ASIGNACIONES

- Descargar y leer **Posición Relativa de Puntos y Rectas con respecto a la Circunferencia**.
- Realizar el **Trabajo Cotidiano # 2**, que será entregado por el profesor en las clases presenciales.
- Participar en el foro **¿Qué pueblo se “salvó” del temblor?**
- Realizar la **Tarea # 1**. Debe ser enviada en un sólo archivo en formato .ggb a través de la pestaña de tareas de Classroom.

Espero que disfruten la lectura y la realización de las actividades.

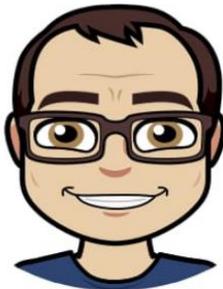
Saludos y nos vemos la próxima semana.



Víctor Hugo Cortés Vargas  
CyborgMATH



# Clase # 2



*√* Víctor Hugo Cortés Vargas



## DIVIDE Y VENCERÁS

Hola a tod@s. ¡Bienvenid@s al increíble y fascinante mundo de las matemáticas!

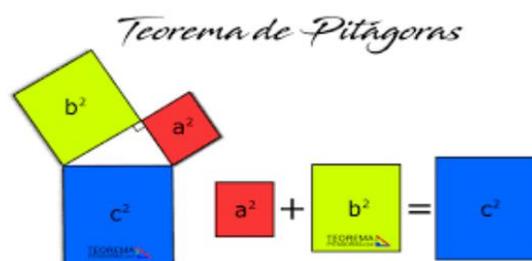
Esta semana continuaremos el estudio de los polígonos, específicamente los irregulares, sus áreas y perímetros. Además, aprenderemos un método que nos permite calcular el área bajo una curva y daremos un paseo por la historia de algunos matemáticos importantes.

Si te gustan los rompecabezas esta es tu semana.

Para introducir esta clase visualizaremos una demostración geométrica de un viejo conocido, el famoso **Teorema de Pitágoras**, recordemos lo que dice:

**En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.**

Toca la siguiente imagen y encontrarás un rompecabezas que podrás manipular para demostrar este teorema de forma geométrica.



## 1) Áreas y perímetros de polígonos irregulares

En esta demostración del Teorema de Pitágoras podemos notar que para rellenar el cuadrado de la hipotenusa utilizamos cinco cuadriláteros que completan perfectamente la superficie del cuadrado en cuestión.

Ahora bien, de acuerdo con la clase anterior sabemos que el cuadrado es un polígono regular y entonces podemos preguntarnos

¿Se puede utilizar esta estrategia con los polígonos irregulares?

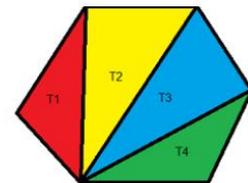
Para contestar esta pregunta recurriremos a otro rompecabezas, conocido como **Tangrama**. Toca la siguiente imagen y realiza al menos tres de los rompecabezas que se proponen en esta actividad



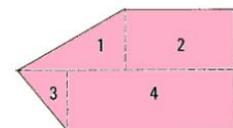
*El **Tangrama** es un juego chino que significa tabla de la sabiduría. Es un rompecabezas que consiste en usar todas las piezas para construir diferentes formas.*

Después de jugar un poco con el Tangrama, podemos responder la pregunta que nos hicimos anteriormente, ya que todas las figuras que realizamos en estos rompecabezas son polígonos irregulares y la superficie se pudo rellenar completamente con figuras más pequeñas y más comúnmente conocidas.

Este método de dividir un polígono en triángulos y cuadriláteros conocidos sin perder la forma del polígono original se conoce con el nombre de **Triangulación** y es una de las estrategias más utilizadas para calcular el área de un polígono irregular, de tal manera que al calcular las áreas de cada una de las figuras y sumar los resultados se obtiene el área del polígono en cuestión, como se muestra en las figuras.



$$\text{Área Total} = T1 + T2 + T3 + T4$$



$$\text{Área Total} = A1 + A2 + A3 + A4$$

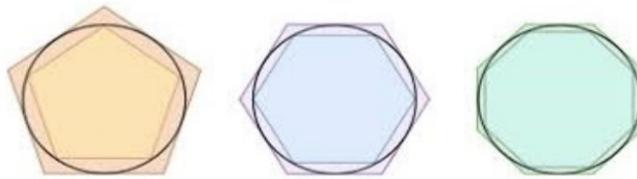
Ahora bien, también podemos calcular el perímetro de estas figuras, recurriendo a la fórmula de distancia entre dos puntos, que estudiamos en noveno año, tal como se muestra en el vídeo que se encuentra en la siguiente imagen



## 2) Área bajo la curva

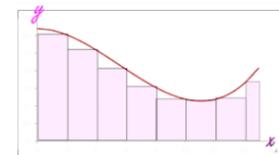
Uno de los mayores dilemas matemáticos de la historia consistió en como aproximar el área de figuras curvas o también llamadas figuras geométricas no poligonales.

Matemáticos como Eudoxo y Arquímedes lograron realizar buenas aproximaciones de las áreas de figuras curvas, como el círculo, con un procedimiento llamado **Método Exhaustivo**, con el cual, mediante las áreas de figuras geométricas más conocidas, como el triángulo y el trapecio se buscaba una aproximación del área de figuras curvas. Si tocas la siguiente figura podrás encontrar una simulación de este método.



Con el auge de la Geometría Analítica y la creación del plano cartesiano el matemático alemán Bernhard Riemann perfecciona este método y logra calcular con mayor precisión el área de una figura curva.

El método utilizado por Riemann consiste en trazar un número finito de rectángulos dentro de un área irregular, calcular el área de cada uno de ellos y sumarlos. Es decir, se dibuja la figura en el plano cartesiano y debajo de la curva se forma un buen número de rectángulos, se determina el área de cada uno de ellos y finalmente se suman esos resultados, lo cual es una aproximación del área de la figura. También se pueden utilizar otras figuras, como el trapecio, para aplicar este método, tal como se muestra en el siguiente vídeo.



**Método de Riemann**



Seguidamente encontrarás una línea del tiempo, en donde podrás observar algunos datos interesantes sobre la evolución del área bajo la curva y sus principales representantes.

# ÁREA BAJO LA CURVA

Evolución Histórica



Además, pueden consultar el apartado de **Recursos** de la plataforma, para consultar los materiales de consulta de esta semana: **Área de un polígono irregular**, **Matemática a tu medida**, **Material de apoyo para la prueba No.1** y **Área de un polígono irregular**.

También pueden consultar la **Unidad Didáctica de Geometría** que se encuentra en el apartado de Trabajo en Clase de Classroom.

Seguidamente se nos mostrarán las asignaciones para esta semana:

## ASIGNACIONES

- Descargar y leer el pdf **Áreas y Perímetros de polígonos irregulares y curvas**.
- Realizar un **Tarea (CLASE #2)** en Google Forms, que se realizará de forma grupal en las clases presenciales y será facilitado por el profesor.
- Participar en el foro **Montaña Rusa**.

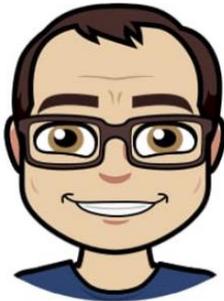
Espero que disfruten la lectura y la realización de las actividades.



Víctor Hugo Cortés Vargas  
CyborgMath



# Clase # 3

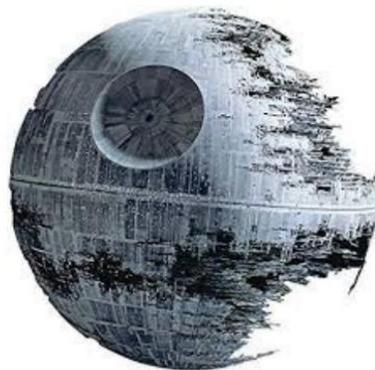


*√*víctor Hugo Cortés Vargas



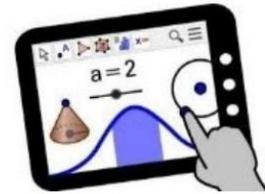
## EL MUNDO SIGUE GIRANDO

Iniciamos esta clase mirando la introducción que se activa al tocar la siguiente imagen



Como se expresa en el vídeo, en esta última parte de la unidad, echaremos un vistazo a dos figuras tridimensionales que se conocen como **sólidos de revolución**, porque se generan al girar una figura plana alrededor de una recta. En este caso nos referimos a la **esfera** y al **cilindro circular recto**.

*Toca la imagen y podrás ver un archivo de Geogebra donde se muestra como se generan los Sólidos de Revolución.*



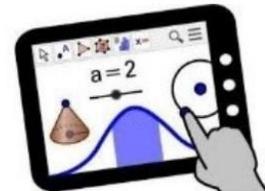
## 1) La Esfera

La esfera es un cuerpo sólido limitado por una superficie curva formada por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de otro punto interior llamado centro de la esfera.

*Toca la imagen y podrás ver un archivo de Geogebra que muestra los elementos de la esfera.*

Este cuerpo sólido tiene cuatro elementos fundamentales: el **centro**, el **radio**, la **cuerda** y el **diámetro**.

En la vida cotidiana podemos encontrar una gran cantidad de objetos que tiene una forma esférica, uno de los más famosos es la Estrella de la Muerte de la saga de la Guerra de la Galaxias, que fue el objeto de estudio del problema que tratamos de resolver en el **Foro 1 (Clase #3)** de esta clase. Seguidamente encontrarás un interesante vídeo que muestra la simulación de construcción de una Estrella de la Muerte.



### 1.1) Secciones planas en la esfera

Una esfera puede ser intersecada por un plano, como cuando un cuchillo (que sería como el plano) corta una naranja. En estos casos, no importa la forma como el plano interseque la esfera (no importa la forma como el cuchillo corte la naranja) siempre se forma una circunferencia. La esfera es la única figura que cumple esta propiedad. Si tocas la imagen de la derecha podrás observar como un plano forma circunferencias en la esfera.



## 2) El Cilindro Circular Recto

El cilindro es una figura que, al igual que la esfera, se encuentra en muchos objetos de la vida cotidiana.

Un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de una región rectangular en torno a uno de sus lados.

Si tomamos un cilindro y lo “abrimos” podremos observar mejor las figuras geométricas planas que lo conforman. En él encontraremos dos círculos que se denominan **bases** del cilindro y una región rectangular que se le denomina **superficie lateral**.

Además, la distancia entre las bases es la **altura** del cilindro.

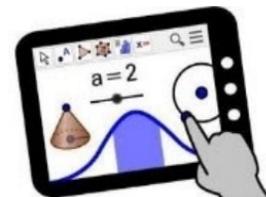
*Toca la imagen y podrás ver un archivo de Geogebra que muestra las partes del cilindro.*



### 2.2 Secciones planas del cilindro

Al igual que con la esfera podemos intersecar un cilindro con un plano, con la diferencia que en este caso dependiendo de la posición del plano se pueden obtener tres figuras geométricas diferentes: circunferencia, rectángulo y elipse.

*Toca la imagen para que puedas intersecar un plano con un cilindro y observar las tres figuras que se forman.*

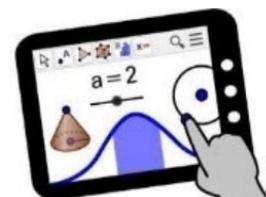


### ¿Qué es una elipse?

En el programa de secundaria es la primera vez que se menciona esta figura, que se genera cuando un plano corta un cilindro de forma oblicua, es decir que el plano no se encuentra ni en posición vertical ni horizontal, más bien es una posición intermedia entre ellas.

La Elipse es una figura geométrica curva y cerrada que resulta de cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo, y que tiene la forma de un círculo achatado (Wikipedia).

*Toca la imagen para que veas el resultado de intersecar un cono con un plano oblicuo.*



Finalmente, les recomiendo que antes de realizar el **Foro 2 (Clase #3)** de esta semana lean el artículo: **¿Y si la estrella de la muerte fue la ciudad inteligente del futuro?**, que hace una interesante reflexión sobre las necesidades actuales y futuras de la humanidad y nuestro planeta.

Pueden consultar el apartado de **Recursos** de la plataforma, donde se sube información que complementan las clases de cada semana. Aparte del artículo que se mencionó en el párrafo anterior podrás encontrar el documento **Conos, cilindros y esferas (Material complementario)**.

También, pueden consultar la **Unidad Didáctica de Geometría** que se encuentra en el apartado de Trabajo en Clase de Classroom.

Seguidamente se nos mostrarán las asignaciones para esta semana:

## ASIGNACIONES

- Descargar y leer: **Sólidos de revolución (Esfera y Cilindro)**.
- Descargar y leer, antes de realizar el Foro # 2: **¿Y si la estrella de la muerte fue la ciudad inteligente del futuro?**
- Realizar el **Trabajo Cotidiano (CLASE #3)**, que será entregado por el profesor en las clases presenciales.
- Participar en el **Foro 1 (CLASE #3): Ayuda a Luke Skywalker a destruir la Estrella de la Muerte**.
- Participar en el **Foro 2 (CLASE #3): ¿Será necesario construir otro planeta o podemos cuidar el que tenemos?**

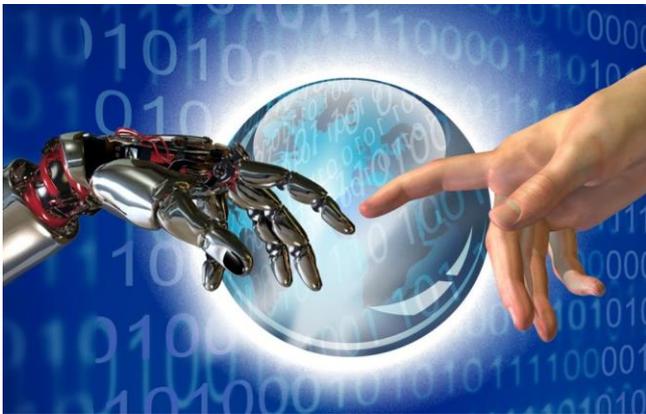
Espero que disfruten la lectura y la realización de las actividades.

Saludos y nos vemos la próxima semana.



Víctor Hugo Cortés Vargas  
CyborgMATH

# **DOCUMENTOS ELABORADOS**



# GUÍA DIDÁCTICA

Curso CyborgMath



Liceo Luis Dobles Segreda  
Departamento de Matemáticas  
Departamento de Innovación Educativa

**Nivel:**  
Décimo año.

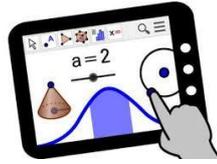
**Profesor:**  
Víctor Hugo Cortés Vargas

**Correo electrónico:**  
vhugocortesv@gmail.com

**Curso Lectivo 2019**

Lea este documento en forma completa  
antes de comenzar el estudio de los  
contenidos.

## 1. Fundamentación



La sociedad ha cambiado su modo de vida y de pensar con el advenimiento de las tecnologías digitales. Para el Sistema Educativo esto representa un reto puesto que, ante el crecimiento de la cantidad de la información que circula en todos los ámbitos del conocimiento, debe desarrollar metodologías que faciliten los procesos de enseñanza y comprensión en las clases.

En todos los campos de la sociedad, el soporte de la información evoluciona, hacia los sistemas multimediales, cada vez más accesibles a todas las personas, provocando cambios en la manera de percibir y pensar las cosas.

Por lo tanto, los recursos educativos utilizados en las instituciones deben renovarse con el propósito de que posibiliten y mejoren la educación, fomentando nuevos métodos para el aprendizaje.

García y Juanes plantean que la tecnología digital emergente no sólo está cambiando nuestra forma de vivir y comunicarnos, sino que está alterando rápida y profundamente, nuestro cerebro. La exposición diaria a la alta tecnología estimula la alteración de los caminos neuronales y la activación de los neurotransmisores, con lo que se afianzan gradualmente en el cerebro nuevos caminos neuronales.

El auge de esta tecnología digital en la sociedad de la información propicia la creación de una cultura audiovisual que hace imperante la necesidad de aprender a interpretar, comprender y analizar las imágenes y con ello estar capacitado para poder comprender los códigos de una sociedad que cada vez más se expresa de forma visual.

El Liceo Luis Dobles Segreda, como parte del Sistema Educativo Nacional, no se ve exento de estas exigencias de los diferentes factores sociales y uno de esos requerimientos consiste en la utilización de los Medios Didácticos Tecnológicos.

En lo que respecta al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se puede describir como un acto complejo y se han hecho grandes esfuerzos para crear estrategias metodológicas que permitan la efectividad de este proceso. Como se plantea en el Programa de Estudio de Matemáticas, la sociedad demanda que las personas puedan realizar operaciones y procesos matemáticos de mayor complejidad, haciendo referencia a las

capacidades matemáticas de: resolver problemas, aplicación de conceptos y procedimientos, modelización de la realidad concreta y a mejores niveles de justificación y argumentación matemática.

Las estrategias metodológicas y los recursos educativos utilizados tradicionalmente han mostrado resultados poco satisfactorios a la hora de enfrentar las dificultades que presentan la población estudiantil en los cursos de matemática (realidad que se evidencia en los porcentajes de rendimiento académico donde los promedios más bajos se ven reflejados comúnmente en esta disciplina). Algunos estudiosos del tema argumentan que esto se debe a que los métodos de aprendizaje se centran principalmente en los ejercicios con procedimientos rutinarios y no en los conceptos y su aplicación; esto debido a estrategias de enseñanza que usan poco la visualización y aplicación en la vida cotidiana de los conceptos y procesos matemáticos.

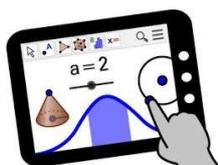
La introducción de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de la matemática en los centros educativos, en general, ha cambiado el enfoque de procedimientos repetitivos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, que frecuentemente promueve la memorización irreflexiva y la reproducción reiterada de fórmulas que se muestran totalmente desvinculadas del quehacer cotidiano, por un ambiente reflexivo y experimental, que desarrolle la capacidad de análisis y síntesis de situaciones problema, que sean acorde a la realidad cotidiana o global para que el individuo se transforme en un agente de cambio de su realidad.

El surgimiento de múltiples softwares para la enseñanza de la matemática y de plataformas de aprendizaje de fácil acceso, convierten a la matemática en una de las materias que, prioritariamente, deben encargarse de promover el uso de la tecnología para la creación de nuevos espacios de investigación en lo que se refiere a los ambientes de aprendizaje y las metodologías de enseñanza.

Los Programas de Estudio de Matemática en Costa Rica establecen “el uso inteligente y visionario de las tecnologías” como uno de sus cinco ejes fundamentales que, en relación con la visión de resolución de problemas, la contextualización de los contenidos, el trabajo colaborativo y el profesor como guía de los procesos de aprendizaje, pueden crear una sinergia propicia para el desarrollo de habilidades lógico-matemáticas relevantes en la actualidad.

Con la intención de responder a las expectativas anteriores los Departamentos de Matemáticas y de Innovación Educativa del Liceo Luis Dobles Segreda se unen para crear CyborgMath, un espacio en la plataforma de aprendizaje Classroom de Google, donde los estudiantes de décimo año cuenten herramientas virtuales que les permitan desarrollar las habilidades requeridas, referentes a profundizar y ampliar los contenidos del ciclo anterior y aprender nuevos conceptos y procedimientos que serán relevantes para algunos estudiantes que proseguirán estudios superiores.

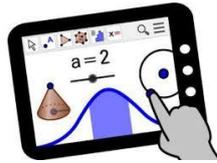
## 2.Objetivos



El proyecto de CyborgMath pretende que cada estudiante de décimo año:

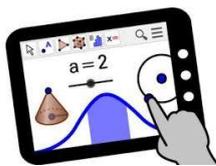
- Estudie analíticamente la circunferencia y algunos conocimientos relacionados con polígonos.
- Desarrolle habilidades para interpretar, representar y resolver problemas, utilizando el lenguaje funcional en sus distintas representaciones, con el fin de explorar y modelar situaciones del contexto.
- Fomente la capacidad de identificar, recolectar e interpretar la información necesaria para resolver problemas del entorno.
- Reconozca la importancia de la Estadística y la Probabilidad como herramientas fundamentales en el desarrollo de diversas áreas del conocimiento.
- Desarrolle destrezas en el manejo de un entorno virtual de aprendizaje y softwares especializados en matemáticas.
- Suscite habilidades de aprendizaje, trabajo colaborativo y el aprecio por las matemáticas.

### 3.Contenidos



Ciclo diversificado (Décimo año)		
Geometría	Relaciones y álgebra	Estadística y probabilidad
<p><b>Geometría Analítica</b></p> <p><b>Circunferencia:</b> centro, radio, recta secante, recta tangente, recta exterior, rectas paralelas, rectas perpendiculares.</p> <p><b>Polígonos:</b> lado, radio, apotema, ángulo interno, ángulo externo, ángulo central, diagonal, perímetro, área, relaciones métricas.</p> <p><b>Visualización espacial:</b> esfera, cilindro circular recto, base, superficie lateral, radio, diámetro, sección plana, elipse.</p>	<p><b>Conjuntos numéricos:</b> unión, intersección, pertenencia, subconjunto, complemento, intervalos.</p> <p><b>Funciones</b></p> <p><b>Concepto de función y de gráfica de una función.</b></p> <p><b>Elementos para el análisis de una función:</b> dominio, imagen, preimagen, ámbito, inyectividad, crecimiento, decrecimiento, ceros, máximo y mínimo, análisis de gráficas de funciones.</p> <p><b>Composición de funciones</b></p> <p><b>Función lineal</b></p> <p><b>Función cuadrática</b></p> <p><b>Sistemas de ecuaciones lineales:</b> sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p>	<p><b>Estadística</b></p> <p><b>Representaciones tabulares y gráficas.</b></p> <p><b>Medidas de posición:</b> moda, media aritmética, mediana, cuartiles, extremos, máximo, mínimo.</p> <p><b>Media aritmética ponderada</b></p> <p><b>Probabilidad</b></p> <p><b>Eventos:</b> relaciones entre eventos, unión, intersección, complemento, eventos mutuamente excluyentes.</p> <p><b>Reglas básicas de las probabilidades:</b> <math>0 \leq P(A) \leq 1</math>, para todo evento A, probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0, <math>P(A \cap B) = P(A) + P(B)</math> para eventos A y B mutuamente excluyentes.</p> <p><b>Otras Propiedades:</b> probabilidad de la unión: <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math>, probabilidad del complemento: <math>P(A^c) = 1 - P(A)</math></p>

## 4. Metodología



De acuerdo con lo establecido en el Programa de estudios de matemáticas de Costa Rica, los estudiantes de décimo año deben desarrollar habilidades en las áreas de: Geometría, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidades. Aunado a esto, se recomienda el uso de la tecnología en algunas de las destrezas correspondientes a este nivel.

Partiendo de esto el curso de matemáticas de décimo año se impartirá de forma híbrida. Virtualmente, en aquellas habilidades en donde el programa indica el uso de la tecnología y presencialmente en aquellas que no se evidencia la necesidad de implementar herramientas tecnológicas.

En las dos etapas las actividades se centrarán en la propuesta pedagógica del programa de estudios, es decir la Resolución de Problemas, con cuatro momentos centrales:

- Propuesta de un problema.
- Trabajo estudiantil independiente.
- Discusión de las posibles soluciones.
- Formalización del tema.

Además, se realizarán trabajos con la intención de reforzar las habilidades desarrolladas en cada tema.

Junto con esto, se considera como fundamental la participación activa, el trabajo colaborativo y el conocimiento previo de los estudiantes, como fuentes del aprendizaje.

En la etapa virtual, además de todo lo mencionado anteriormente, se implementan herramientas especificadas del aprendizaje virtual que contribuyen con la propuesta pedagógica. Esto de acuerdo con las tres unidades en las que se divide el programa de matemáticas para décimo: Geometría, Relaciones y Álgebra, y Estadística y Probabilidad.

Seguidamente se detallan algunas consideraciones de cada unidad:

### **a) Geometría**

En esta unidad el estudiante participará en un foro de discusión donde debe resolver, conjuntamente con sus compañeros, un problema de la vida cotidiana relacionado con la representación gráfica de una circunferencia, su centro y el radio. Además, utilizará conocimientos previos reforzados a través de vídeos, presentaciones y documentos pdf, y archivos de Geogebra para visualizar, determinar y conocer conceptos matemáticos. Finalmente, los trabajos de aplicación de conceptos serán realizados en Google Forms o en Kahoot! para el caso de los trabajos colaborativos.

### **b) Relaciones y Álgebra**

En la segunda etapa, el estudiante debe utilizar las herramientas Google Docs, archivos de Geogebra y Foros para realizar trabajos colaborativos en los cuales deben resolver problemas de la vida cotidiana acerca de la ecuación y la gráfica de funciones. Luego, por medio de documentos pdf, el software matemático Geogebra y la aplicación de algunos conocimientos previos, se formalizan conceptos matemáticos de esta temática. Geogebra, también será utilizado por los estudiantes para los trabajos de aplicación.

### **c) Estadística y Probabilidad**

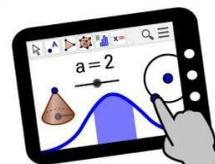
Para la última etapa, se vuelve a utilizar el foro como herramienta de trabajo colaborativo para la resolución de problemas contextualizados. Los conceptos estadísticos se formalizan con una E-Clase con archivos pdf. Por último, los estudiantes resuelven un estudio de caso utilizando e interpretando la información que brindan las medidas de posición a través de las herramientas Geogebra, foro, Google Forms y Google Docs.

Además de todo lo expuesto, los estudiantes realizarán dos tareas por periodo de forma virtual con las herramientas tecnológicas Geogebra, Excel y Google Forms.

Adicionalmente, se contará con la mensajería interna, que será utilizada como medio de comunicación personalizada entre los aprendices y el tutor, para evacuar dudas o dificultades

presentes en el desarrollo de las actividades y como forma de captar la atención de los estudiantes que no participan en las actividades de la plataforma.

## 5. Evaluación de los aprendizajes



El Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes (REA), establece tres funciones para la evaluación: diagnóstica, formativa y sumativa. De acuerdo con esto, las actividades que realizará el aprendiz transitan por estas tres funciones.

La evaluación diagnóstica que se realizará de forma permanente y a través de todas las actividades del curso.

La evaluación formativa que se refiere a las actividades que no se consignan con una calificación, pero que son fundamentales para el desarrollo de las clases, como realización de lecturas, participación en algunos foros y visualización de vídeos.

Finalmente, la evaluación sumativa, que, según lo establecido por el REA, se realizará por medio de rúbricas y pruebas realizadas por el docente, donde solamente se puede consignar las habilidades presentes en el Programa de Estudios de Matemática.

De acuerdo con esto, se realizarán mínimo dos pruebas y tareas por periodo, además de considerar la asistencia y el trabajo cotidiano de los estudiantes.

El valor porcentual que tienen cada uno de los componentes de la calificación por periodo en el décimo año corresponde a:

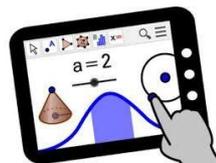
- Trabajo cotidiano 35%
- Tareas 10%
- Asistencia 10%
- Pruebas 45%

La calificación de cada periodo contribuye para la obtención del promedio anual de la siguiente forma:

- I Periodo 30%
- II Periodo 30%
- III Periodo 40%

**La nota mínima para la aprobación del curso es de 70% de promedio anual.**

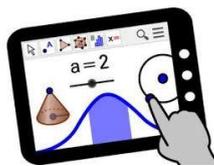
## 6. Cronograma de Trabajo



A continuación, se presenta el cronograma de actividades que se pretende cumplir en el desarrollo del curso.

Distribución por Semana	Actividades
1	Taller de capacitación y reconocimiento de la plataforma
1	Taller de capacitación y reconocimiento de Geogebra
5	Geometría
2 (últimas dos semanas del punto anterior)	Tarea # 1
1	I Prueba
5	Geometría
2 (últimas dos semanas del punto anterior)	Tarea # 2
1	II Prueba. Evaluación del funcionamiento y resultados
6	Relaciones y álgebra
2 (últimas dos semanas del punto anterior)	Tarea # 3
1	III Prueba
2	Vacaciones
6	Relaciones y álgebra
2 (últimas dos semanas del punto anterior)	Tarea # 4
1	IV Prueba. Evaluación del funcionamiento y resultados
4	Estadística y probabilidad
2 (últimas dos semanas del punto anterior)	Tarea # 5
1	V Prueba
4	Estadística y probabilidad
4	Tarea # 6
1	VI Prueba. Evaluación del funcionamiento y resultados

## 7. Presentación del tutor



Buenas a todos y a todas

¡Bienvenidos al increíble y fascinante mundo de las matemáticas!

Mi nombre es Víctor Hugo Cortés Vargas y durante este año seré su profesor de matemáticas tanto en las clases presenciales como virtuales.

Empecé a laborar como profesor de matemáticas en el año 1997, desde entonces he tenido la oportunidad de trabajar con poblaciones y contextos muy diversos; desde jóvenes y adolescentes como ustedes, en los colegios: Rodrigo Hernández Vargas (Barva), Colegio La Salle (San José) y el Liceo de la Virgen (Sarapiquí), como con adultos en el Colegio Nocturno de Barva (Barva), el Instituto Profesional de Educación Comunitaria (Barva), el Colegio Nocturno de Puerto Viejo (Sarapiquí) y los centros penitenciarios Buen Pastor (Desamparados) y CAI San Rafael (Alajuela).

Además, obtuve un Bachillerato en la Enseñanza de las Matemáticas y una Licenciatura en Docencia en la UNED de Costa Rica, donde desarrollé una investigación sobre el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación en contextos de encierro. También cuento con una Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Internacional San Isidro Labrador.

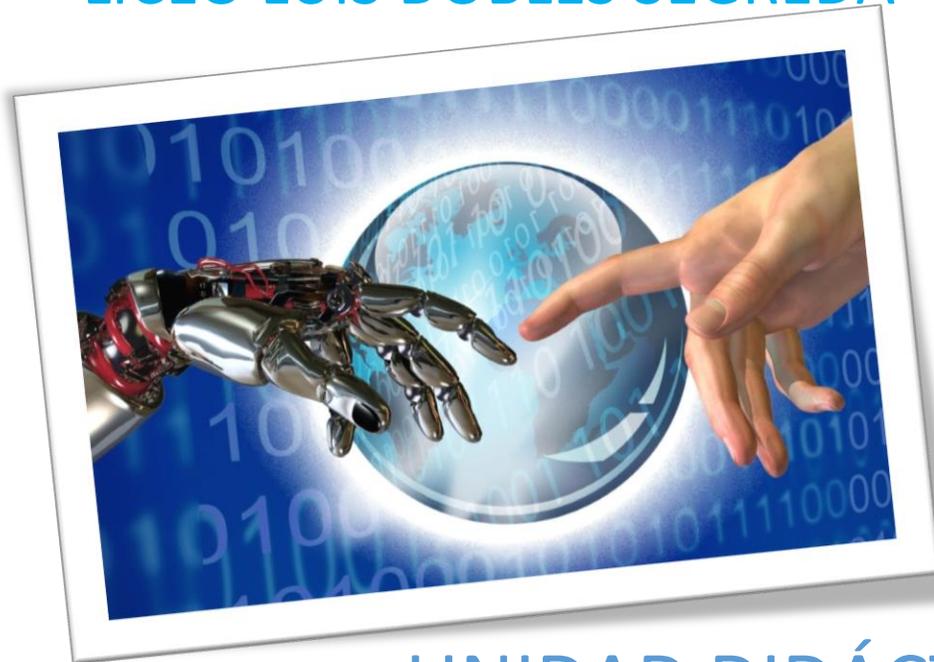
También, cuento con la Especialización en Entornos Virtuales de Aprendizaje del Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente “Aprende Virtual” de la Universidad Técnica Nacional y, actualmente, me encuentro en la elaboración del curso final para la Maestría en Entornos Virtuales de Aprendizaje.

En suma, quisiera desearles que la experiencia de este año sea provechosa para cada uno de ustedes y espero que al final del curso lectivo el trabajo nos lleve a mejorar en el trabajo colaborativo y el aprecio por las matemáticas.





LICEO LUIS DOBLES SEGREDA



## UNIDAD DIDÁCTICA: GEOMETRÍA

CyborgMath

**Descripción breve**

Recorrido por los principales conceptos de la Geometría Analítica, los polígonos y la visualización espacial.

Prof. Víctor Hugo Cortés Vargas  
profevictor@gmail.com

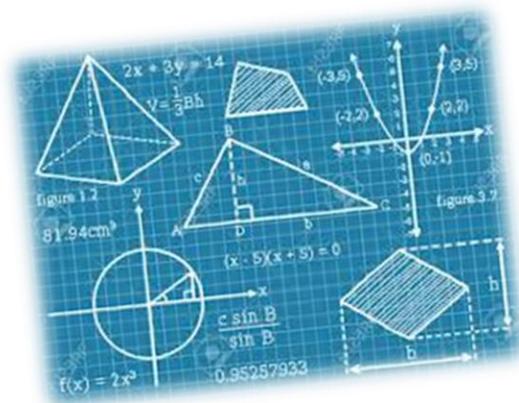
## Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b> .....	2
<b>2. Geometría Analítica</b> .....	3
<b>2.1 Circunferencia</b> .....	3
2.1.1 Traslación de una circunferencia.....	6
2.1.2 Posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia .....	7
2.1.3 Rectas en la circunferencia .....	8
<b>2.2 Rectas en el plano</b> .....	11
<b>2.3 Teorema del radio y la tangente</b> .....	13
<b>3. Polígonos</b> .....	13
<b>3.1 Clasificación de los polígonos</b> .....	14
3.1.1 Polígono regular e irregular.....	14
3.1.2 Polígono inscrito y circunscrito .....	14
<b>3.2 Elementos de un polígono regular</b> .....	15
<b>3.3 Relaciones métricas de los elementos en un polígono regular</b> .....	15
<b>3.4 Área de polígonos irregulares</b> .....	16
<b>3.5 Área y perímetro de figuras curvas</b> .....	17
<b>4. Visualización Espacial</b> .....	18
<b>4.1 Esfera</b> .....	18
4.1.1 Partes de la esfera .....	18
4.1.2 Secciones planas que se forman en la esfera .....	19
<b>4.2 Cilindro Circular Recto</b> .....	20
4.2.1 Partes del cilindro .....	20
4.2.2 Secciones planas que se forman en el cilindro .....	20
<b>5. Bibliografía</b> .....	21

## 1. Introducción

Durante los años anteriores nos hemos capacitado en varias habilidades que nos permitirán comprender los conceptos geométricos que conoceremos en este ciclo. Según los programas de estudio de matemáticas (PEM,2012) en esta etapa el estudiante:

- Tiene la habilidad de aplicar diversas propiedades de las figuras geométricas.
- Posee nociones básicas sobre trigonometría, geometría analítica y del espacio.
- Tiene la habilidad de abstraer cuestiones geométricas y de argumentar usando propiedades matemáticas.



Todo esto nos faculta para realizar un análisis de **la circunferencia** desde el punto vista analítico, profundizar en las propiedades de **los polígonos** y visualizar algunas características de **los cuerpos geométricos sólidos**, tal poco se desprende del propósito de enseñanza del ciclo en el plan de estudios.

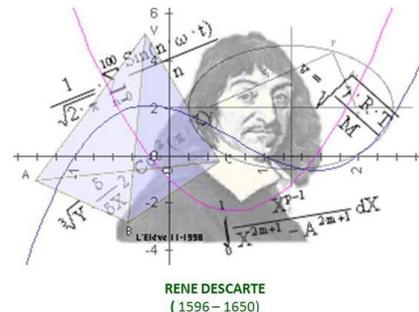
### Propósito de enseñanza

El propósito de la enseñanza de Geometría en este ciclo es estudiar analíticamente la circunferencia, algunos conocimientos relacionados con polígonos y algunas transformaciones en el plano.

PEM, 2012

## 2. Geometría Analítica

La Geometría Analítica es la parte de matemática que resuelve problemas geométricos con ayuda del Álgebra, mediante un sistema de ejes coordenados (González, sf). En nuestro estudio emplearemos un sistema coordenado que se utilizó en años anteriores conocido como el **Plano Cartesiano**, que fue inventado por el filósofo y matemático francés René Descartes.



### René Descartes

Descartes fue un filósofo, matemático y físico francés. Se le considera el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna.

Su nombre sería Renatus Cartesius en su forma latinizada. De su apellido "Cartesius" se deriva el adjetivo cartesiano que se aplica en matemáticas en referencia, por ejemplo, a los planos, ejes o coordenadas. (Wikipedia)

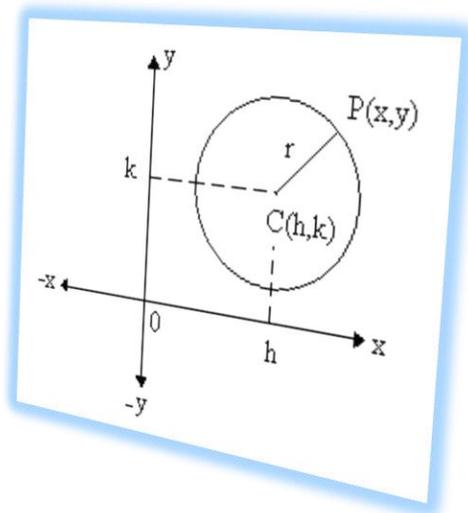
Aunque con la Geometría Analítica se pueden estudiar un sinnúmero de figuras, iniciaremos haciendo un análisis profundo de la circunferencia.

### 2.1 Circunferencia

Existen varias definiciones de circunferencia, en este curso la definimos como la línea curva y cerrada formada por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de otro punto que se ubica en el mismo plano y que se denomina **centro** de la circunferencia.

Ahora bien, lo que nos interesa en este caso es: ¿Cómo podemos generalizar una fórmula algebraica para la circunferencia, con ayuda de la Geometría Analítica?

Primero, ubicamos el centro de la circunferencia en el plano cartesiano y le asignaremos las letras “ $h$ ” y “ $k$ ” como coordenadas, es decir el centro lo designamos con una letra mayúscula  $C$  y se escribiría  $C(h,k)$ , que corresponde al par ordenado que se le asigna al centro.



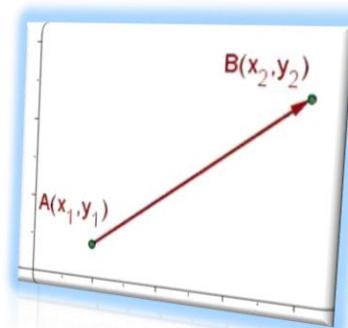
Luego dibujamos la circunferencia y tomamos uno de los puntos de la misma, en nuestro caso le asignamos la letra  $P$  y las coordenadas “ $x$ ” y “ $y$ ”, por lo que se escribiría como  $P(x,y)$ .

Después de esto, podemos calcular la distancia entre esos dos puntos por medio de la fórmula de distancia entre dos puntos que se estudió en noveno año, para calcular la longitud del radio.

### Fórmula Distancia entre dos Puntos

Sean dos puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  en el plano cartesiano, la distancia entre ellos queda determinada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Entonces si tomamos  $C(h,k)$  y  $P(x,y)$  para aplicar la fórmula anterior, se obtendría

$$d(C,P) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Esta fórmula representa la distancia entre  $C$  y  $P$ , que podríamos interpretar como la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia y que es equivalente al radio de la circunferencia, entonces si sustituimos  $d(C,P)$  por  $r$  (radio) en la fórmula, nos quedaría

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

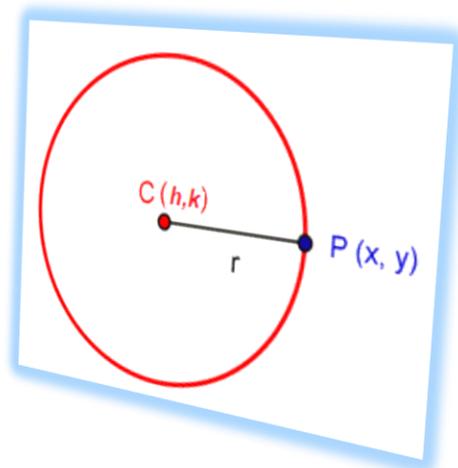
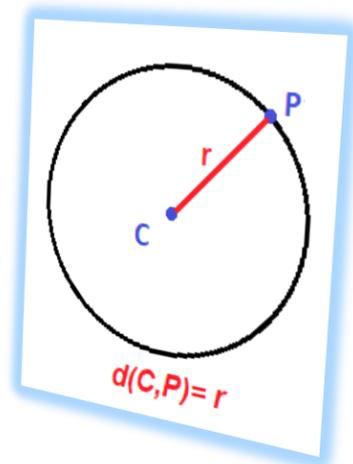
Que equivale al radio de la circunferencia. Finalmente, si elevamos al cuadrado ambos lados de la fórmula obtenemos la **ecuación ordinaria o canónica de la circunferencia**, que es la que utilizaremos durante este curso para el análisis de las circunferencias.

#### Ecuación ordinaria o canónica de la circunferencia

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

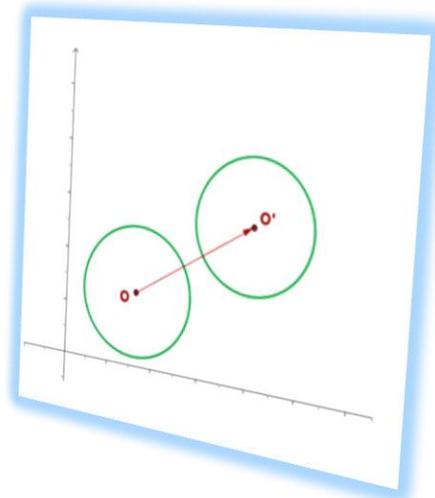
En donde

- “ $x$ ” y “ $y$ ” representan las coordenadas de cualquier punto sobre la circunferencia.
- “ $h$ ” y “ $k$ ” representan el centro de la circunferencia.
- “ $r$ ” representa el radio del círculo.



### 2.1.1 Traslación de una circunferencia

La traslación de la circunferencia en el plano cartesiano, consisten en generar una nueva circunferencia que posee el mismo radio de la primera, pero con un nuevo punto como centro. Gráficamente lo que sucede es que se genera una nueva circunferencia con idénticas dimensiones que la primera, pero en otro espacio del plano cartesiano.

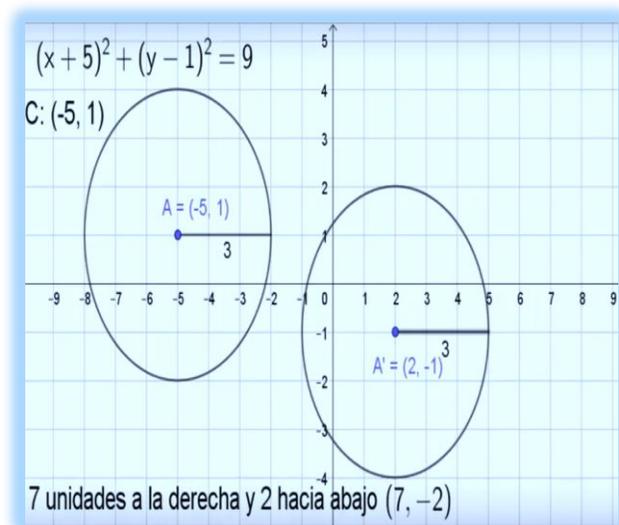


Para localizar el nuevo centro se debe contar con el número de espacios y la dirección a donde se trasladará la circunferencia. Si se indica **arriba** o a la **derecha** los espacios cuentan como **positivos** y si la indicación es hacia **abajo** o a la **izquierda** los espacios cuentan como **negativos**. Con esta información, sumamos a las coordenadas del centro original los espacios que se moverá, como se muestra en el siguiente ejemplo

Una circunferencia con  $r = 3$  y centro  $A(-5,1)$  se traslada 7 espacios hacia la derecha y 2 espacios hacia abajo en el plano cartesiano. Determine las coordenadas de nuevo centro de la circunferencia.

En este caso tomamos 7 positivo en el eje X y 2 negativo en el eje Y. Entonces para localizar el nuevo centro sumamos con las coordenadas correspondientes.

**A(-5,1)** sumando los espacios  $(-5 + 7, 1 + -2)$  obtenemos **A'(2,-1)** como nuevo centro se denomina **A'** para indicar que es diferente al original.

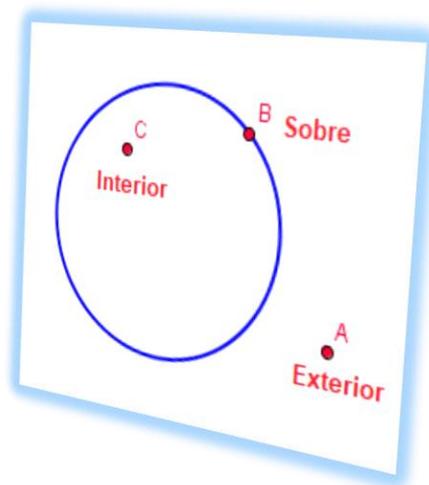


Observe en la imagen que, aunque las coordenadas de los centros cambian, las medidas de los radios se mantienen, como se mencionó anteriormente.

### 2.1.2 *Posición relativa de un punto con respecto a la circunferencia*

Si tenemos un punto y una circunferencia se pueden establecer tres posibilidades:

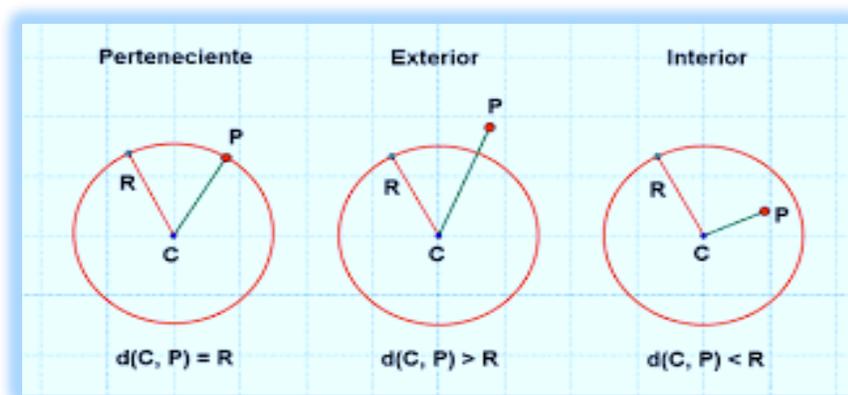
- **Punto exterior:** Cuando el punto se encuentra fuera de la circunferencia.
- **Punto interior:** Cuando el punto se encuentra dentro de la circunferencia.
- **Punto sobre la circunferencia:** Cuando el punto está sobre la curva que forma la circunferencia.



Para determinar la posición relativa del punto en cuestión, existen dos alternativas: graficar la circunferencia y el punto en el plano cartesiano o comparar la longitud del radio con la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto que denominaremos  $d(C,P)$ . Para la segunda forma, es necesario recurrir a la fórmula de distancia entre dos puntos que se mostró anteriormente.

Teniendo la longitud del radio y la distancia entre el punto y el centro de la circunferencia se pueden establecer tres opciones:

- Si el radio es mayor que la distancia  $d(C,P)$  entonces el punto es interior.
- Si el radio es menor que la distancia  $d(C,P)$  entonces el punto es exterior.
- Si el radio es igual que la distancia  $d(C,P)$  entonces el punto está sobre la circunferencia o pertenece a la circunferencia.

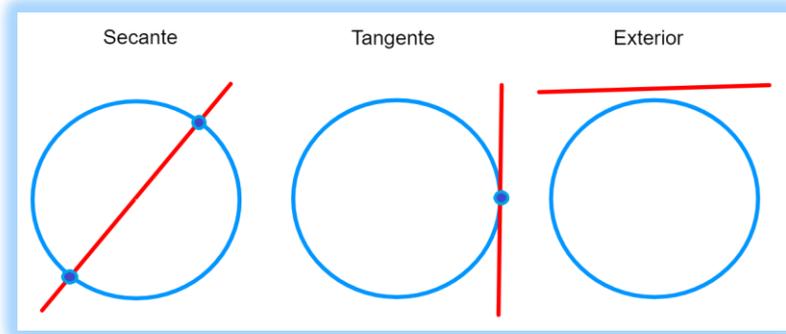


### 2.1.3 Rectas en la circunferencia

También existe una posición relativa entre la circunferencia y una recta dada.

Al igual que en el caso anterior se pueden presentar tres posibilidades:

- **Recta secante**, cuando la recta y la circunferencia se unen en dos puntos.
- **Recta tangente**, cuando la recta y la circunferencia se unen en un punto.
- **Recta exterior**, cuando la recta y la circunferencia no se unen.



Para determinar la posición relativa de la recta con respecto a la circunferencia, existen dos alternativas: graficar la circunferencia y la recta en el plano cartesiano o determinar algebraicamente en cuantos puntos se intersecan entre ellas.

Para la segunda forma, es necesario recordar la ecuación de la recta que se estudió en octavo año

### Ecuación de la recta

$$y = mx + b$$

**m**: constante que se denomina pendiente de la recta.

**b**: constante que determina la intersección de la recta con el Eje Y del plano cartesiano.



Partiendo de esta fórmula y de la ecuación de la circunferencia, podemos realizar una sustitución de la variable “**y**” por su equivalente en la ecuación de la recta “**mx+b**” como se muestra a continuación.

Ecuación de la circunferencia  $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

Ecuación de la recta  $y = mx + b$

Sustituimos la letra “**y**” por su equivalente en la ecuación de la circunferencia

$$r^2 = (x - h)^2 + (mx + b - k)^2$$

Al resolver esta ecuación se obtendrá una ecuación de segundo grado, como las que se estudiaron en noveno año. A este tipo de ecuación se le puede calcular el discriminante

**Ecuación de segundo grado**

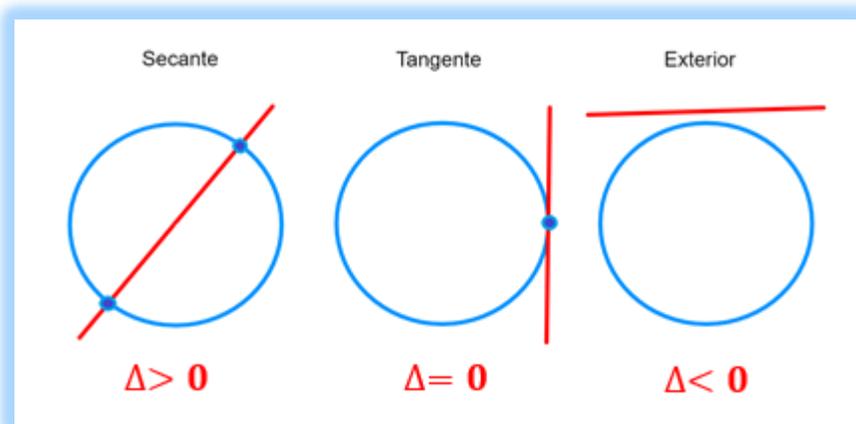
$$ax^2 + bx + c = 0$$

**Fórmula del discriminante**

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

De acuerdo con el resultado del discriminante, se puede determinar los puntos comunes entre la recta y la circunferencia de la siguiente forma:

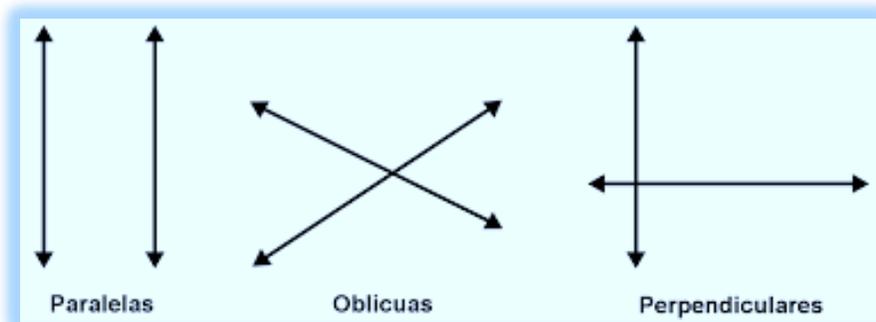
- Si el  $\Delta$  es **positivo** entonces la recta es secante a la circunferencia.
- Si el  $\Delta$  es **igual a cero** entonces la recta es tangente a la circunferencia.
- Si el  $\Delta$  es **negativo** entonces la recta es exterior a la circunferencia.



## 2.2 Rectas en el plano

Si trazamos dos o más rectas en el plano cartesiano se pueden presentar tres posibilidades entre ellas:

- Si las rectas no tengan ningún punto en común denominamos las rectas como **paralelas**.
- Si las rectas se intersecan en un punto y forman un ángulo recto entonces decimos que las rectas son **perpendiculares**.
- Si las rectas se intersecan en un punto y no forman ángulo recto las denominamos como rectas **secantes u oblicuas**.



De acuerdo con los programas de estudio de matemáticas, para el nivel de décimo año lo importante es aprender a identificar cuando dos o más rectas son **paralelas o perpendiculares**, para lo cual existen dos formas de determinarlo: graficar las rectas en el plano cartesiano o analizar las propiedades de la ecuación de la recta relativas a este tema.

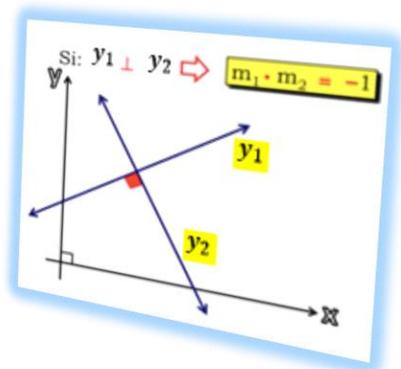
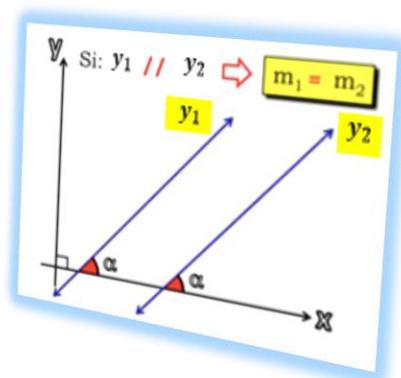
Como recordamos anteriormente la ecuación de la recta es  $y = mx + b$ , si tenemos la ecuación de dos rectas podríamos diferenciarlas de la siguiente forma:

$$\text{Recta 1} \quad y_1 = m_1 + b_1$$

$$\text{Recta 2} \quad y_2 = m_2 + b_2$$

Partiendo de estas ecuaciones y sus pendientes " $m$ " podemos determinar la relación entre ellas a través de las siguientes propiedades

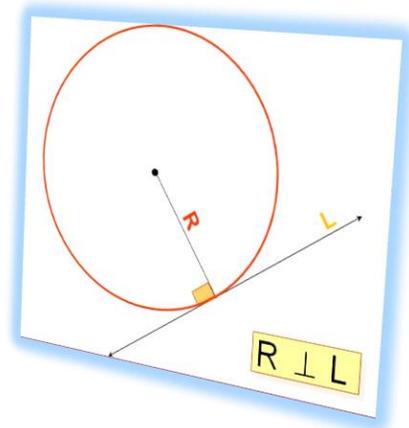
- Si  $m_1 = m_2$  entonces las rectas son paralelas y se representa simbólicamente de la siguiente forma  $y_1 \parallel y_2$  que significa que la primera recta es paralela a la segunda.
- Si  $m_1 \cdot m_2 = -1$ , es decir si se multiplican las dos pendientes y el resultado es -1, entonces las rectas son perpendiculares y se representa simbólicamente de la siguiente forma  $y_1 \perp y_2$ , que significa que la primera recta es perpendicular a la segunda.



### 2.3 Teorema del radio y la tangente

Existe una propiedad que establece una relación entre el radio de una circunferencia y una recta tangente a la misma (recta que se une con la circunferencia en un solo punto). Este punto donde se une la recta con la circunferencia se denomina **punto de tangencia** y es de suma importancia para la siguiente relación

Toda recta tangente a la circunferencia es perpendicular (forma  $90^\circ$ ) al radio en su punto de tangencia.

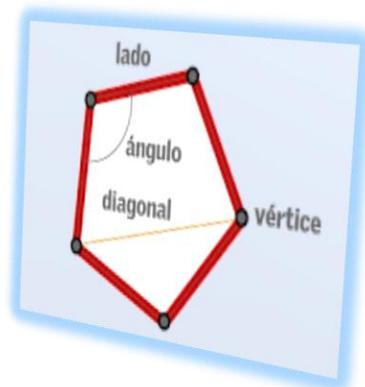


Es decir, si tenemos una recta tangente a la circunferencia y desde su punto de tangencia trazamos un radio del círculo, la tangente y el radio forman un ángulo de  $90^\circ$ .

## 3. Polígonos

La palabra **polígono** proviene del griego y está compuesta por dos vocablos: **poli**, que se traduce como “muchos” y **gono** que significa ángulo, por lo que podríamos decir que un polígono es una figura con muchos ángulos (Definición.DE).

Un polígono es una figura geométrica plana que está compuesta por líneas rectas que encierran una región del plano. Como hemos visto en años anteriores, estos segmentos se denominan **lados** y los puntos donde se intersecan se llaman **vértices**.

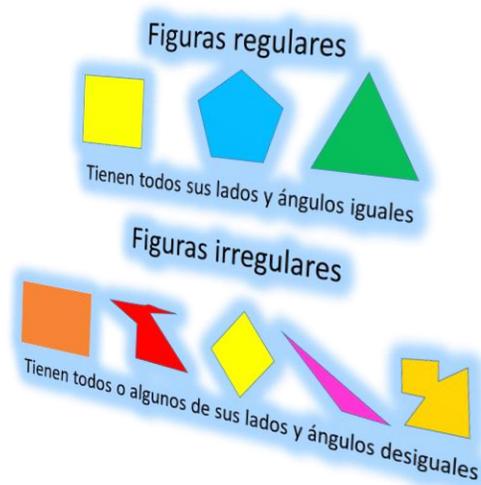


Existen varias formas de clasificar los polígonos. Seguidamente se definen las dos clasificaciones que necesitamos para el nivel en el que nos encontramos.

### 3.1 Clasificación de los polígonos

#### 3.1.1 Polígono regular e irregular

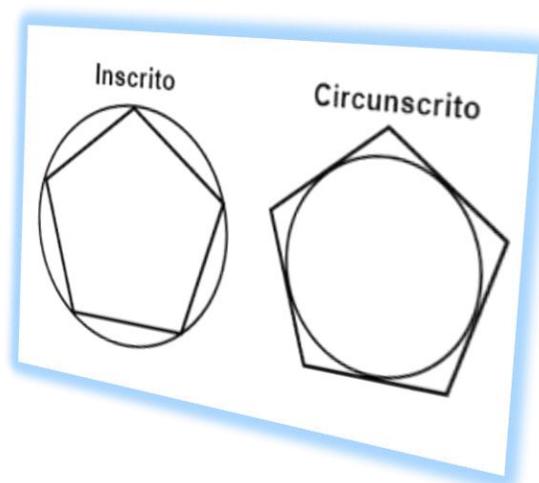
Un **polígono regular** es un polígono cuyos lados y ángulos son congruentes (iguales entre sí) y un **polígono es irregular** si posee al menos un ángulo y un lado que no es congruente con los otros.



#### 3.1.2 Polígono inscrito y circunscrito

Un **polígono está inscrito** en una circunferencia cuando todos sus vértices son puntos de la circunferencia y todos sus lados están incluidos dentro del círculo que ésta define.

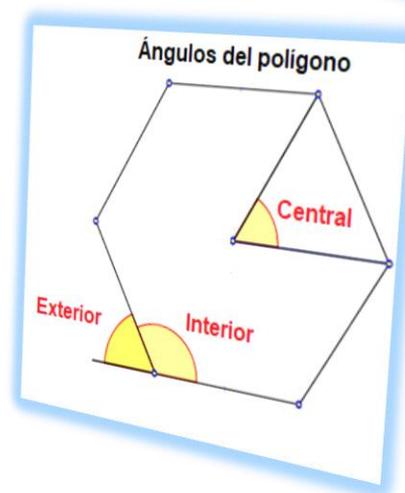
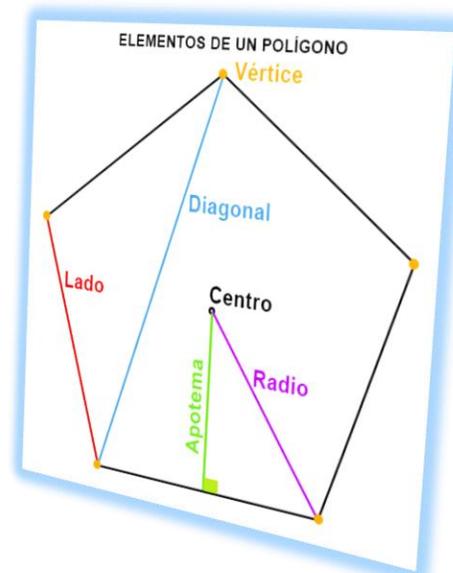
Un **polígono está circunscrito** en una circunferencia, si sus vértices están situados fuera de la circunferencia, y sus lados son tangentes a la circunferencia. (Geoka, 2015)



### 3.2 Elementos de un polígono regular

Un polígono regular posee varios elementos que lo conforman, entre ellos:

- **Centro:** punto que se encuentra a la misma distancia de los vértices del polígono.
- **Apotema:** Segmento perpendicular al lado del polígono y que une el centro del polígono con el centro del lado.
- **Radio:** Segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices.
- **Ángulo Central:** Ángulo formado por dos radios consecutivos del polígono.
- **Ángulo interior:** Ángulo formado por dos lados consecutivos del polígono.
- **Ángulo exterior:** Ángulo que se formado por un lado y la prolongación de un lado consecutivo, externamente a la figura.
- **Diagonal:** Segmento que une dos vértices no consecutivos.
- **Perímetro:** suma de todos los lados del polígono.
- **Área:** Medida de la superficie del polígono.



### 3.3 Relaciones métricas de los elementos en un polígono regular

Para resolver situaciones problemáticas referentes a los polígonos, se debe contar con las fórmulas que permiten calcular la medida de los diferentes elementos de esta figura. Seguidamente se presentan las

fórmulas que utilizaremos durante el desarrollo de las clases referentes a los polígonos regulares.

---

Fórmulas para polígonos regulares

Elemento	Fórmula
Ángulo Central	$\angle c = \frac{360^\circ}{n}$
Ángulo Interno	$\angle i = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n}$
Suma de los ángulos internos	$\Sigma \angle i = 180^\circ(n - 2)$
Ángulo externo	$\angle e = \frac{360^\circ}{n}$
Número de diagonales desde un vértice	$d = n - 3$
Total de diagonales del polígono	$D = \frac{n(n - 3)}{2}$
Perímetro	$P = n \cdot l$
Área	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

Simbología

n: número de lados

$\angle$ : ángulo

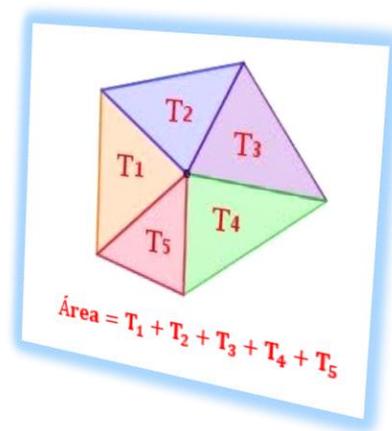
$\Sigma$ : suma

a: apotema

---

### 3.4 Área de polígonos irregulares

Para calcular el área de un polígono irregular se utiliza un método denominado **Triangulación** en el cual se divide la superficie del polígono en triángulos o cuadriláteros conocidos sin perder la forma del polígono irregular original. Luego se calcula el área de cada una de esas figuras y se suman los resultados. Con esto obtenemos el área del polígono irregular.

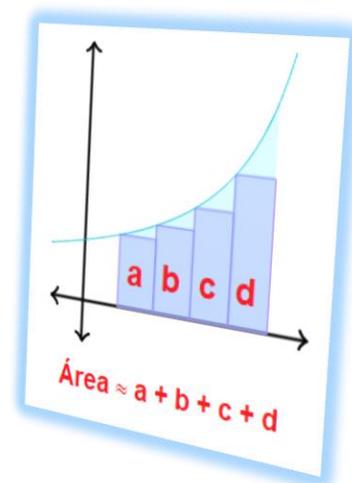
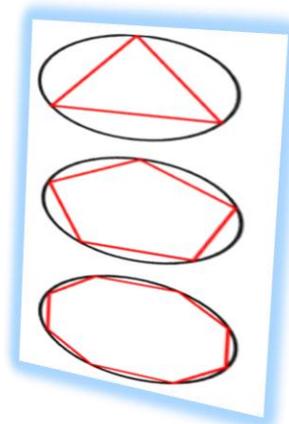


### 3.5 Área y perímetro de figuras curvas

Uno de los mayores dilemas matemáticos de la historia consistió en como aproximar el área de una figuras curvas o también llamadas figuras geométricas no poligonales.

Matemáticos como Eudoxo y Arquímedes lograron realizar buenas aproximaciones de las áreas de figuras curvas como el círculo con un procedimiento llamado **Método Exhaustivo**, con el cual, mediante las áreas de figuras geométricas más conocidas, como el triángulo y el trapecio se buscaba una aproximación del área de figuras curvas. Con el auge de la Geometría Analítica y la creación del plano cartesiano el matemático alemán Bernhard Riemann perfecciona este método y logra calcular con mayor precisión el área de una figura curva.

El método utilizado por Riemann consiste en trazar un número finito de rectángulos dentro de un área irregular, calcular el área de cada uno de ellos y sumarlos. Es decir, se dibuja la figura en el plano cartesiano y debajo de la curva se forma un buen número de rectángulos, se determina el área de cada uno de ellos y finalmente se suman esos resultados, lo cual es una aproximación del área de la figura. También se pueden utilizar otras figuras, como el trapecio, para aplicar este método.



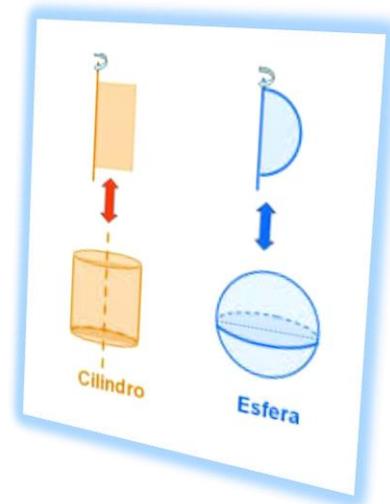
#### Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. (Wikipedia)



## 4. Visualización Espacial

En esta última parte de la unidad, echaremos un vistazo a dos figuras tridimensionales que se conocen como **sólidos de revolución**, porque se generan al girar una figura plana alrededor de una recta. En este caso nos referimos a la **esfera** y al **cilindro circular recto**.



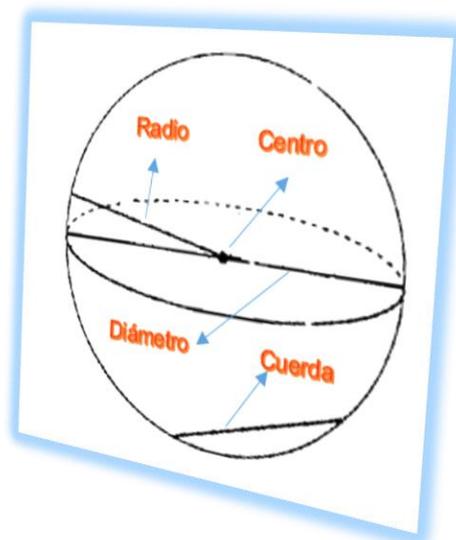
### 4.1 Esfera

La esfera es un cuerpo sólido limitado por una superficie curva formada por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de otro punto interior llamado centro de la esfera.

#### 4.1.1 Partes de la esfera

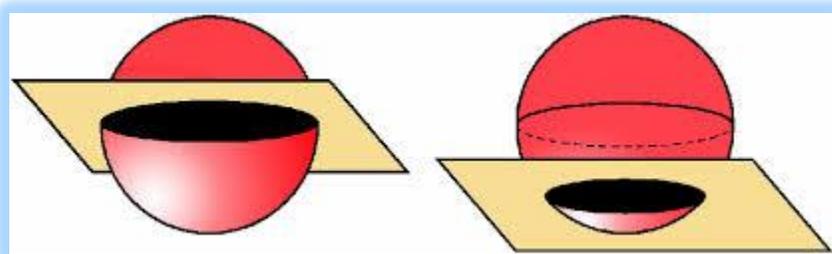
La esfera tiene varios elementos que se enuncian a continuación:

- **Centro:** Punto interior que equidista (se encuentra a la misma distancia) de cualquier punto de la esfera.
- **Radio:** Segmento que une el centro con un punto de la esfera.
- **Cuerda:** Segmento que une dos puntos de la superficie esférica.
- **Diámetro:** Cuerda que pasa por el centro de la esfera, equivale a dos radios.

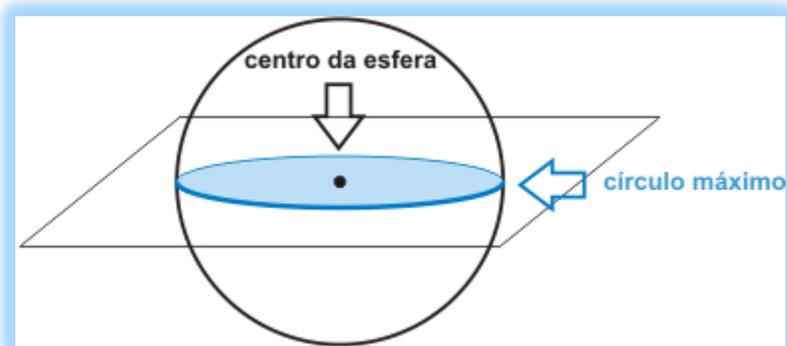


### 4.1.2 Secciones planas que se forman en la esfera

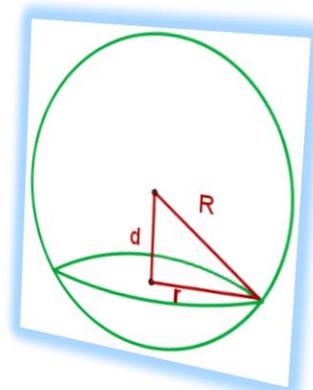
Una esfera puede ser intersecada por un plano, como cuando un cuchillo (que sería como el plano) corta una naranja. En estos casos, no importa la forma como el plano interseque la esfera (no importa la forma como el cuchillo corte la naranja) siempre se forma una circunferencia. La esfera es la única figura que cumple esta propiedad.



Si el plano pasa por el centro de la esfera, el radio de la circunferencia que se forma es el mismo de la esfera y a esta figura se le llama **Círculo Máximo**.



Además, si formamos un triángulo rectángulo con el radio de la circunferencia, el radio de la esfera y la distancia entre el centro de la circunferencia y el centro de la esfera, podemos calcular la medida de estos segmentos por medio del Teorema de Pitágoras.



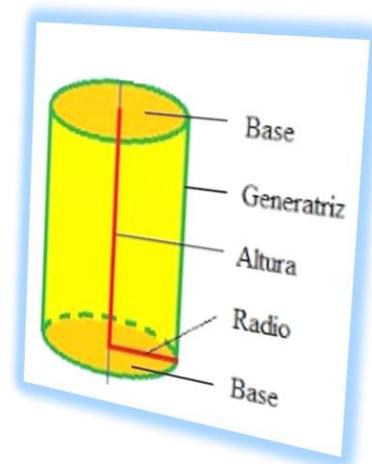
## 4.2 Cilindro Circular Recto

Un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de una región rectangular en torno a uno de sus lados.

### 4.2.1 Partes del cilindro

Si tomamos un cilindro y lo “abrimos” podremos observar mejor las figuras geométricas planas que lo conforman. En él encontraremos dos círculos que se denominan **bases** del cilindro y una región rectangular que se le denomina **superficie lateral**.

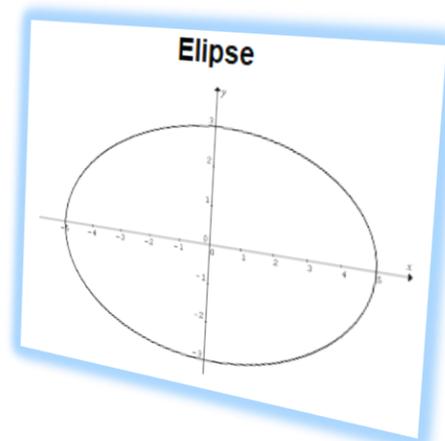
Además, la distancia entre las bases es la **altura** del cilindro y el segmento de la superficie lateral y que es congruente (de igual medida) que la altura se denomina **generatriz**.

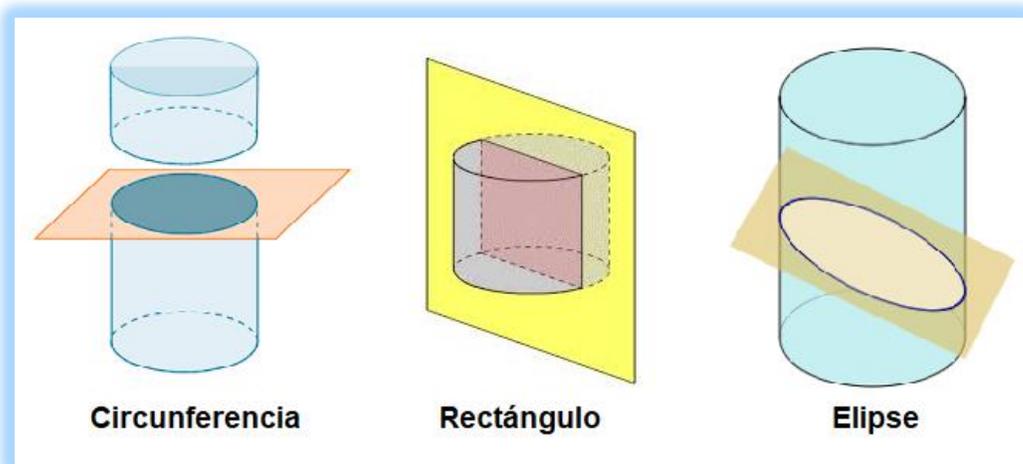


### 4.2.2 Secciones planas que se forman en el cilindro

Al igual que con la esfera podemos intersecar un cilindro con un plano, con la diferencia que en este caso dependiendo de la posición del plano se obtienen varias figuras geométricas.

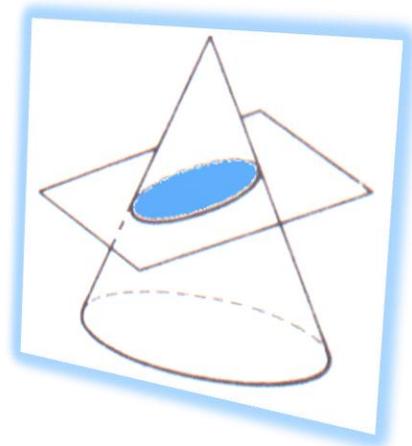
- Si el plano es paralelo a las bases del cilindro se genera una **circunferencia**.
- Si el plano es perpendicular (forma  $90^\circ$ ) a las bases se genera un **rectángulo**.
- Si el plano es oblicuo (que no forma ángulo de  $90^\circ$ ) a las bases del cilindro se genera una **elipse**.





### Elipse

La Elipse es una figura geométrica curva y cerrada que resulta de cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo, y que tiene la forma de un círculo achatado (Wikipedia).



## 5. Bibliografía

Bernhard Riemann, (s.f.). En Wikipedia. Recuperado de [https://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard\\_Riemann](https://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann)

Definición de polígono, (s.f.). En Definición.DE. Recuperado de <https://definicion.de/poligono/>

Elipse, (s.f.). En Wikipedia. Recuperado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Elipse>

F prima Grupo Editorial, (2014). Matemática 10: Hacia la resolución de problemas. F prima Grupo Editorial. Costa Rica.

González, P. (s.f.), La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática. Recuperado de

<http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

Ministerio de Educación Pública (2012), Programas de Estudio de Matemáticas, Costa Rica.

Polígonos Circunscritos, (2015). En Geoka. Recuperado de [https://www.geoka.net/poligonos/poligonos\\_circunscritos.html](https://www.geoka.net/poligonos/poligonos_circunscritos.html)

Polígonos Inscritos, (2015). En Geoka. Recuperado de [https://www.geoka.net/poligonos/poligonos\\_inscritos.html](https://www.geoka.net/poligonos/poligonos_inscritos.html)

Ramírez, M., (2015). Pendulum 10°: Develando la realidad. Siwo Editorial. Costa Rica.

René Descartes, (s.f.). En Wikipedia. Recuperado de [https://es.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9\\_Descartes](https://es.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes)

## **Conclusiones**

Una vez realizado el análisis de la información presentes en este documento, se procede a presentar las conclusiones a partir de los objetivos que se establecieron en este proyecto.

- 1) Con respecto a la creación una clase en la plataforma Classroom, se establece que el Liceo Luis Dobles Segreda cuenta con un espacio propicio para trabajar en una plataforma de aprendizaje, puesto que al ser un colegio de innovación educativa ha sido dotado con las herramientas tecnológicas necesarias tanto a nivel de software, hardware y de conexión a internet.
- 2) El segundo aspecto consiste en la articulación de un equipo de trabajo entre el docente de matemáticas y el Departamento de innovación educativa institucional, que se ha logrado a través de reuniones coordinadas por el interés de ambas partes y la dirección institucional por fomentar las capacitaciones en la plataforma Classroom para todos los docentes del Liceo.
- 3) A través de esta articulación mencionada en el punto anterior, se logró que todas las computadoras de la institución, que están al servicio de los estudiantes, cuenten con los programas y el mantenimiento necesario para la correcta ejecución del proyecto. Además, por medio de las profesoras de informática educativa del departamento de innovación los estudiantes pueden configurar sus teléfonos celulares a las necesidades de la plataforma.
- 4) Por ensayos realizados a nivel institucional con la plataforma Classroom se optó que el registro de los estudiantes a las clases se debe realizar mediante el código de acceso, solamente en casos muy puntuales, donde el estudiante presente alguna dificultad el tutor invitará al estudiante por medio de correo electrónico.

- 5) Las profesoras de informática educativa del departamento de innovación educativa se encargarán de la creación de tutoriales, manuales o guías que permitan al estudiante acceder correctamente la plataforma Classroom y el programa Geogebra.
- 6) Se encontró que el software libre Geogebra cuenta con un banco de recursos en línea que pueden ser consultados o descargados de forma gratuita tanto por el tutor como por los estudiantes.
- 7) Las clases virtuales que se proponen en este documento fueron creadas tomando aspectos como: lenguaje coloquial, argumentación, interactividad, gamificación y metacognición, que permitan a los estudiantes ser sujetos activos en las clases de matemáticas a través del uso de herramientas tecnológicas.