UNIVERSIDAD TÉCNICA NACIONAL

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

CENTRO DE FORMACIÓN PEDAGÓGICA Y TECNOLOGÍA EDUCATIVA

MAESTRÍA EN ENTORNOS VIRTUALES DE APRENDIZAJE

PROYECTO DE INTERVENCIÓN

TÍTULO DEL PROYECTO:

Virtualización del curso MA-1005 Ecuaciones Diferenciales de la Universidad de Costa Rica para estudiantes en condición de rezago de las carreras de Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica en la Sede Interuniversitaria de Alajuela

PREPARADO POR:

Lic. Daniel Alonso González Núñez

TUTOR DEL PROYECTO:

Mariela Delauro

AÑO: 2018

ÍNDICE

RESUMEN TÉCNICO

El presente trabajo consiste en la presentación de una propuesta de virtualización del curso MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería, de la Universidad de Costa Rica (UCR). El mismo se diseñará para aquella población que ha perdido el mismo en al menos dos oportunidad y presenta una serie de particularidades que se mostrarán luego.

Primeramente, se procede a describir el problema que motiva esta investigación, seguido de un ejercicio de prospectiva, que describe lo que se espera que se logre con la puesta en práctica de este trabajo. Luego, se detallan las teorías educativas que sustentarán las actividades a proponer y realizar. Posterior a ello, viene el establecimiento de los objetivos del proyecto, y los resultados esperados.

Después de todo lo anterior, se da paso a establecer las pautas para la evaluación y seguimiento del proyecto, dando inicio con el establecimiento de momentos de evaluación a lo largo del desarrollo del mismo, así como de labores de seguimiento a las labores (docente, administrativa y estudiantiles) y al cumplimiento de objetivos.

Luego, se mostrará un conjunto de indicadores de evaluación (en cuanto a administración, aprendizaje y tecnologías, tutoría y material didáctico respecta), el cual antecede a la presentación del cronograma y presupuesto del proyecto, así como la bibliografía.

Se sigue con lo referente al desarrollo del trabajo, en el que se presenta el nombre del curso, junto con la selección de herramientas y su justificación, la planificación y escritura de las clases (con varios elementos que ellas incluyen como imágenes e hipervínculos) y se culmina esta parte mediante la muestra de capturas de pantalla de las clases publicadas en el entorno virtual elegido para el desarrollo de esta propuesta.

Se cierra este trabajo, con la debida presentación de las conclusiones que se han obtenido a partir de todo el proceso que ha conllevado la elaboración del mismo.

PROPUESTA

DEL

PROYECTO

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema

El problema educativo planteado en este trabajo se detalla a continuación:

Existe una cantidad creciente de alumnos de las carreras de Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica de la Universidad de Costa Rica, empadronados en la Sede Interuniversitaria de Alajuela que, por razones laborales, personales y/o académicas, presentan un estancamiento en el curso MA-1005 "Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería". Lo anterior se refleja en la continua matrícula semestre a semestre del curso, seguida por una constante inasistencia y, al ser un curso cuya nota está dividida en 3 exámenes parciales únicamente, el estudiante opta por abandonar la misma una vez más y se ve en la obligación de matricularlo de nuevo el siguiente semestre, donde el fenómeno posiblemente ocurrirá de nueva cuenta.

Justificación de la elección del problema

En la actualidad, el autor de este proyecto está próximo a impartir, por octava oportunidad (siendo la primera en 2012 y luego, de forma continua desde el primer ciclo del 2015), el curso MA-1005 "Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería". Este curso corresponde al último de aquellos denominados "cursos de servicio" de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica.

Con el transcurrir de la experiencia, semestre tras semestre (y como es, en cierta forma "normal" en los cursos de Matemática de la UCR) van surgiendo alumnos que comienzan a rezagarse en ciertos cursos, debido (según ellos) a la alta complejidad de sus contenidos y al alto nivel de las evaluaciones, aunado a la evaluación rigurosa y estrictamente sumativa (compuesta por exámenes parciales únicamente) a la que son sometidos. Se ha observado que varios estudiantes muestran el siguiente patrón:

- Aparecen matriculados al inicio de cada periodo, generalmente con promedios de matrícula bajos (inferiores a 6).
- Participan en unas pocas clases iniciales, con el fin de conocer al docente y a las "reglas de juego del curso", como las fechas de exámenes y fuentes de material bibliográfico, principalmente.

- Desisten de las lecciones y no vuelven hasta que se da la aplicación del I Parcial, o bien, en algunos casos asisten a la reposición de ésta (Prueba extraordinaria realizada en caso de ausencia justificable según el artículo 24 del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil de la UCR).
- Tras la aplicación de la prueba supra mencionada, obtienen una nota muy baja. Esto suele ser la mayoría de veces, el detonante que les provoca desertar. Algunos muy ocasionalmente, permanecen en esta modalidad hasta el II Parcial pero rara vez hasta el final del curso.

En el recinto universitario donde se ha llevado a cabo todo este proceso de observación del fenómeno descrito (Sede Interuniversitaria de Alajuela), existen al menos 10 estudiantes debidamente detectados (hasta el I Semestre del 2018) con la condición de rezago que presentan este comportamiento. Algunas preguntas que han surgido tras la detección de este fenómeno son:

- ¿Qué razones les motiva a matricular el curso pero no involucrarse de lleno en él, al punto de perderlo en reiteradas veces?
- ¿En qué grado, académica, emocional y hasta económicamente (ya que existen estudiante en esta condición que son becados y la beca depende de buenos resultados en los cursos) les perjudica reprobarlo una y otra vez?
- ¿Existirán motivos extracurriculares (trabajo, familia, salud, distancia, etc.) que les impide desempeñarse normalmente en el curso?
- ¿Se habrá detectado este fenómeno por parte de colegas o a nivel administrativo?
- En caso de que lo anterior haya sucedido, ¿Se ha realizado alguna propuesta para resolver el problema?

Con el pasar del tiempo y tras indagación propia con estudiantes cursantes de esta materia han salido algunas razones del porqué se presenta el fenómeno. Algunas respuestas obtenidas son:

- Motivos laborales: Los estudiantes identificados laboran (en su mayoría) para costearse sus estudios y eso limita su asistencia a los cursos, pues éstos se imparten usualmente en las mañanas o tardes, no en las noches. Aunado a lo anterior, se tiene que estos estudiantes son personas cuyas edades rondan un mínimo de 23 años y por tal razón, junto con sus estudios comparten otras responsabilidades mayores, como manutención propia y de familia, crianza de hijos, entre otras.

- Visitas a empresas como parte del trabajo en otros cursos: El curso MA-1005 “Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería” se ubica en el cuarto semestre de las carreras de Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica. En el caso de la primera, en el mismo periodo lectivo se lleva la materia “Ingeniería de Calidad I”, el cual según comentan los estudiantes, requiere de visitas semanales que en ocasiones chocan con el horario en el que se imparten los diferentes grupos que se abren para el curso (cuya asistencia, de acuerdo al Artículo 14.bis del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil de la Universidad de Costa Rica, no es obligatoria). Por tal razón, se ausentan de las clases presenciales y eso altera, sin duda alguna, su desempeño en el mismo, pues deben “ponerse al día” estudiando de manera independiente. De igual manera esto sucede (en estudiantes de ambas Ingenierías) cuando el curso se lleva paralelamente con materias de ciclos posteriores, pues las segundas requieren también de constantes visitas o giras y con ello, se produce la repitencia del fenómeno de inasistencia mencionado.
- Permisividad de la malla curricular: Existía (hasta hace unos semestres atrás) una especie de “portillo” que le dejaba al estudiante la posibilidad de avanzar hasta los últimos cursos de su plan de estudios, dejando al curso MA-1005 prácticamente hasta el final de la carrera, pues éste no consiste en requisito para cursar ningún otro curso más de la malla. Sin embargo, hasta el año 2015 (al menos a nivel de Sede Interuniversitaria de Alajuela, recinto de la Universidad de Costa Rica donde el autor de este proyecto se desempeña profesionalmente), se estipuló que no se podían llevar materias que estuviesen como máximo 2 ciclos por delante del último curso. Aún así, existen alumnos que avanzan hasta el sexto semestre de la carrera y llegan a quedar “encasillados” con el curso MA-1005, de forma que no pueden seguir con materias del sétimo ciclo (cuarto año).
- Metodología de Evaluación del curso centrada sólo en pruebas escritas: El curso MA-1005 “Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería” tiene una evaluación sumamente rígida, constituida por únicamente 3 exámenes parciales (30% el de menor nota y 35% los restantes, según el programa de curso establecido para el

ciclo I-2018). Por ello, la obtención de bajas notas en el primer y segundo parcial, limitan en demasía las posibilidades de aprobación, máxime que en el curso aunque la asistencia no es obligatoria, es sumamente importante pues son 5 horas a la semana en las que se cubre la teoría y se realiza práctica (esa es la metodología usual del curso, encajando con un modelo completamente tradicionalista de la enseñanza), de forma más programada comparada con lo que ellos podrían estudiar independientemente, debido a las limitaciones ya comentadas.

El problema descrito, junto con los antecedentes dados en los párrafos anteriores, se justifica en el hecho de que los estudiantes que están vinculados con éste tienen serios problemas en el avance de su carrera y consecuentemente, en la culminación de ésta. Se han escuchado frases de estudiantes que insisten en que para realizar su Trabajo Final de Graduación, requieren de aprobar este curso únicamente, pues ya lo correspondiente meramente a la carrera ya ha sido aprobado.

El abordaje de este problema mediante la oferta de un grupo exclusivo para esta población en condición de rezago y en la que la metodología gire en torno al trabajo mediante plataforma virtual (en este caso, será el sitio Moodle de la Escuela de Matemática de la UCR, a la que todos los estudiantes de esta universidad tienen acceso mediante su cuenta de correo institucional) resolverá el problema de la inasistencia en primer lugar, pues las limitaciones de tiempo y espacio (choques de horarios con trabajo o visitas a empresas, por ejemplo) se eliminarán. En conjunto con lo anterior, el empleo de la plataforma dará pie a un seguimiento mayor y más detallado de la actividad del estudiante, pues a pesar de que por la normativa vigente, el curso no puede ser modificado en cuanto a aspectos de evaluación (deberían realizar las mismas pruebas parciales presenciales), éste se puede plantear tomando en cuenta actividades como foros, wikis y autoevaluaciones que tengan un carácter obligatorio en su realización y con ello, que se conviertan en un registro no cuantitativo de calificación. Es decir, el estudiante deberá ser partícipe de todas las actividades que se incluyan en el foro, las cuales evidencien el estudio de las clases y los materiales de lectura tanto obligatorios como optativos.

Con lo anterior, se pretende entonces darle al estudiante en condición de rezago y que esté cursando MA-1005, una oportunidad de afrontar el curso diferente, en la que el acompañamiento y seguimiento que le haga el docente le permita sentir el compromiso de involucrarse en mayor medida, lo cual no ocurriría en el ámbito presencial por las diversas situaciones ya comentadas.

Contexto del problema

1. ¿Quiénes presentan el problema?: Este problema lo presentan los estudiantes de las carreras de Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica de la Universidad de Costa Rica, en la Sede Interuniversitaria de Alajuela. Los alumnos rondan edades cercanas a los 23 años o más, inclusive. Suelen ser estudiantes que dejaron el curso para último momento y debido a ello, presentan otros compromisos (de otros cursos o personales) que hacen que su asistencia al curso MA-1005 sea mínima o nula, lo cual afecta notoriamente su desempeño y esto se refleja en la temprana deserción del mismo. La cantidad de estudiantes que actualmente se encuentran en este estado, actualmente se encuentra entre 10 y 18 estudiantes (considerando los que han reprobado hasta dos veces tras finalizar el I Semestre del 2018), dentro de los que se han detectado a nivel de Sede.
2. Características de la asignatura: El curso MA-1005 “Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería” corresponde al último de 6 cursos de Matemática que deben llevar los estudiantes de las carreras mencionadas a lo largo de los primeros 4 o 5 semestres de periodo de formación. Los cursos anteriores son:
    - MA-0001 (Precálculo)
    - MA-1001 (Cálculo I)
    - MA-1002 (Cálculo II)
    - MA-1003 (Cálculo III)
    - MA-1004 (Álgebra Lineal)

Todos ellos dotan al estudiante del conocimiento matemático básico, suficiente y necesario para adquirir los conocimientos sobre ecuaciones diferenciales estipulados en el programa de estudio (denominado acá “Carta al Estudiante”) de este curso.

Sin embargo, al ser un curso que requiere de mucho conocimiento y bagaje matemático, existe también la problemática de estudiantes que llegan con bases pobres (a pesar de aprobar las materias previas) o bien, que por interrupciones en la formación matemática llegan al curso con cierto “desaprendizaje”, lo cual les exige un esfuerzo adicional por reaprender muchos de los conceptos previos y procedimientos claves que sirven de conectores con los nuevos aprendizajes.

Desde el I Ciclo del 2015, cuando se empezó a impartir el curso de manera ininterrumpida cada semestre, el nivel de aprobación ha sido muy irregular, como se muestra en la siguiente tabla:

CICLO LECTIVO	PROMOCIÓN
I-2015	75,67%
II-2015	54,05%
I-2016	22,45%
II-2016	53,00%
I-2017	36,15%

Fuente: Registros de Notas, Prof.: Lic. Daniel González Núñez.

Algunos posibles factores que incidan en los resultados mostrados:

- En el I-2015, se empezó a aplicar la política mencionada con anterioridad: No permitir el avance en cursos (de a lo sumo 2 ciclos posteriores) en la carrera respectiva hasta tanto no se apruebe el curso en el que se presente mayor rezago. Dicha situación pudo haber sido motivo de que varios estudiantes a los que se les aplicó la medida no sólo tuvieran esa “medida de presión” como un aliciente para dar un mayor esfuerzo, sino que la poca cantidad de cursos que podían tomar les daba una mayor cantidad de tiempo para asistir a lecciones y prepararse adecuadamente.
- El curso MA-1005 es un curso colegiado. Esto quiere decir que todos los estudiantes de la UCR matriculados en éste, indistintamente de la sede en la que se hallen empadronados, realizan los mismos exámenes, programados para un mismo día y hora, de manera que se realiza una evaluación completamente uniforme. Las pruebas son elaboradas por el coordinador de la cátedra, con algunos aportes de profesores que imparten el curso. El nivel de complejidad y el tipo de ejercicios (La prueba siempre 100% de desarrollo) de los exámenes puede variar de un semestre a otro.
- Recurrentes cambios en la coordinación de la cátedra del curso: Suele suceder que año tras año hay relevo en la figura del coordinador. Lo anterior tiene repercusión en la forma como se diseñan y aplican las evaluaciones. Aspectos

de forma y la dificultad de los ejercicios incluidos por los distintos coordinadores suelen ser objeto de comentarios por parte de los alumnos.

2. PROSPECTIVA

El curso “MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería” en su modalidad virtual, ha permitido el seguimiento continuo y personalizado de cada uno de los participantes, los cuales a partir de lo anterior, han logrado presentar un mejor aprendizaje de los diversos contenidos del curso, lo cual se ve reflejado en rendimiento académico de cada uno y en la consecuente aprobación del mismo tras la realización de todas las actividades virtuales y evaluaciones presenciales, lo que les permite continuar con la toma de cursos posteriores de la malla curricular de sus respectivas carreras (es decir, han dejado atrás su condición de rezago). Tras esta puesta en práctica de esta propuesta en la Sede Interuniversitaria de Alajuela, se hará un análisis más a fondo de los resultados obtenidos para determinar la viabilidad de llevar a la práctica, propuestas similares en otras sedes y cursos de servicio del área de Matemática de la Universidad de Costa Rica en un plazo no mayor a dos años, a partir del I Semestre del 2019.

3. PROPUESTA PEDAGÓGICA

La principal línea teórica de este proyecto será el constructivismo, apoyado por ideas y postulados de otras teorías como el conductismo. También, se incluyen algunos apuntes teóricos de otras corrientes que nutren las propuestas de este trabajo.

Constructivismo:
Los rasgos principales del constructivismo que estarán presentes a lo largo de todas las acciones pedagógicas a desarrollar, son los siguientes:

Algunas ideas que constructivistas aplicadas a este trabajo son:

- El pensamiento formal: Espiro (2017) resalta el pensamiento formal desde la Epistemología Genética de Piaget. De acuerdo a la autora, éste se caracteriza por la posibilidad de un razonamiento hipotético-deductivo, en el que se emplean diversas premisas y razonamientos para generar conclusiones. En el curso MA-1005, por ser el último de la formación matemática recibida por los estudiantes de las carreras de Ingeniería Industrial y Mecánica, requiere del conocimiento previo de muchos teoremas y procedimientos matemáticos que son útiles para la generación de los nuevos conceptos. El cálculo de límites, derivadas e integrales, así como el uso de series de potencias y números complejos dan pie para la deducción de nuevos conocimientos que se derivan de la temática tratada en el curso.

- Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) (Vygotsky, citado por Espiro, 2017): El curso MA-1005 está completamente secuenciado en su estructura; los contenidos de los 2 primeros grandes temas resultan ser la base de todos los que se aprenderán posteriormente. Por tanto, se tendrá en cuenta a la hora de ver estos primeros temas, que se abarquen de la manera más correcta posible, a fin de que permitan introducir los temas posteriores más fácilmente y para el estudiante sea mucho más sencillo su tratamiento y asimilación. Asimismo y entrelazando esto con el primer punto, el aprendizaje de nuevas técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales y los nuevos tipos de ellas se van “reduciendo” a los casos más elementales, los cuales ya son conocidos por los alumnos con lo aprendido desde las primeras clases. Siguiendo la línea expuesta por Espiro (2017) citando a Vygotsky (1996), se pretende un mayor acercamiento al nivel real de la ZDP, mediante la guía del docente o las actividades colaborativas y a su vez, que ésta vaya dando paso al desarrollo en el estudiante al nivel real de desarrollo, una vez que tenga que desenvolverse en actividades de evaluación tanto formativas (dentro de la plataforma) como sumativas (exámenes parciales).

Conductismo:

Por otra parte, del conductismo se rescatarán algunas ideas como las siguientes:

- El carácter mecanicista del conocimiento y aprendizaje memorístico (Espiro, 2017): El curso MA-1005 tiene en sus objetivos el aprendizaje de muchas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales. Para que el estudiante vaya escalando en el nivel de profundidad de conocimiento que se espera que adquiera, deberá resolver gran cantidad de ejercicios en los que se requiera reiterativamente la aplicación sucesiva de procedimientos y fórmulas, lo cual hace necesario y hasta de alguna forma, inherente, la presencia de ambos aspectos conductistas.

- Sin duda, la implementación de actividades evaluativas (foros, chats, Wikis) en las que se mida algún nivel de progreso en la adquisición de conocimientos, la cual junto con la propia actividad, permitirá que haya una retroalimentación por parte del docente, misma que venga a fungir como los "refuerzos" planteados por Skinner en su teoría (Espiro, 2017).

Otros aportes teóricos que sustentan esta propuesta son los siguientes:

- Motivación intrínseca y extrínseca: Corresponden (Espiro, 2017) a la disposición por el logro del aprendizaje, a partir de situaciones de índole personal y externas. Para esta propuesta, se pretende que el cambio de la modalidad del curso para la población meta, así como la diversidad de actividades, la metodología de trabajo y el tipo de seguimiento que se les va a brindar, correspondan a elementos de motivación extrínseca para dicha población. Asimismo, el estudiante al darse una nueva oportunidad de poder encarar el curso y sabiendo que ya no tendrá los obstáculos que la modalidad presencial le imponía, podrá desarrollar una motivación intrínseca por lograr el aprendizaje.
- Modelo de aprendizaje VARK (Fleming, 1987 citado por Espiro, 2017). Todos los materiales y actividades del curso se harán partiendo del hecho de que los estudiantes pueden aprender ya sea viendo, escuchando, haciendo o leyendo/escribiendo. Así pues, por ejemplo, a la hora de desarrollar un objeto de aprendizaje para un determinado tema, se pueden incluir vídeos explicativos (ver, leer y escuchar), así como actividades paralelas en las que el estudiante deba realizar actividades amplificar los conocimientos que está adquiriendo (escribir y hacer).
- Principios conectivistas: Dentro de los postulados del conectivismo establecidos por Siemens (2004), está el hecho de que “el aprendizaje puede residir en dispositivos no humanos”. En la propuesta, este principio se reflejará en que dentro del entorno virtual se alojarán tantos los recursos y herramientas que promueven el aprendizaje, como las evidencias de interacciones y construcciones de conocimientos entre los alumnos como foros y wikis, las cuales podrán ser revisadas en todo momento por los aprendices, mientras el entorno esté activo.

Esto también responde a la actitud “prosumidora” del estudiante, en tanto al consumo como a la creación (conjunta) de conocimientos.

4. OBJETIVOS DEL PROYECTO

Objetivo General

- Desarrollar el curso MA-1005 “Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería” de la Universidad de Costa Rica exclusivamente para población en condición de rezago de la Sede Interuniversitaria de Alajuela, por medio de actividades llevadas a cabo en un entorno virtual de aprendizaje, con el fin de lograr un involucramiento mayor de los estudiantes en el cursado y de brindar un seguimiento detallado de los mismos, que culmine con un mayor aprovechamiento y la consecuente aprobación de los aprendices.

Objetivos Específicos

- Modificar el curso MA-1005 “Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería” para poder ser impartido en un entorno virtual de aprendizaje, mediante el planteo de actividades completamente virtuales y distribuidas por medio de bloques en el entorno dicho.
- Emplear de forma correcta y continua el entorno virtual de aprendizaje y sus potencialidades, mediante el establecimiento de una diversidad de actividades y recursos alusivos a la materia, con el fin de reemplazar de la metodología de trabajo presencial.
- Utilizar los recursos propios del entorno virtual de aprendizaje, así como las actividades programadas en el cronograma del curso, con el fin de dar un seguimiento personalizado y detallado del desempeño y avance de cada uno de los cursantes.
- Analizar la promoción obtenida al final del cursado, mediante los registros de actividades de la plataforma y las pruebas escritas, con el fin de determinar el grado de viabilidad de la propuesta de curso virtual para estudiantes rezagados.

5. RESULTADOS ESPERADOS

Lista de Resultados esperados

- Preparación del entorno virtual con todas las actividades y materiales, para fines del II Ciclo del 2018.
- Apertura del grupo para el I Ciclo del 2019, con una población de al menos 10 personas.
- Mejora en la promoción respecto a semestres anteriores y nula deserción tras el primer parcial presencial.
- Realización de las todas las evaluaciones y actividades por parte de los estudiantes.
- Finalización del cursado por parte de todos los estudiantes o al menos de un 90% de ellos.
- Logro de una promoción mayor o igual al 80%.
- Presentación de un informe ante autoridades de la Sede Interuniversitaria de Alajuela y la Escuela de Matemática de la UCR para discusión de resultados.
- Análisis de extensión de la propuesta a otras sedes de la universidad.

6. ASPECTOS OPERATIVOS

Administración

Respecto a esto, se pretende (en el orden establecido) ejecutar cada uno de las siguientes acciones:

- Dirigirse a la Administración Académica (Jefa Administrativa y Coordinadores de Carrera de Ingeniería Industrial y Mecánica) de la Sede Interuniversitaria de Alajuela para hacer de su conocimiento la propuesta de apertura de un grupo del curso MA-1005 “Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería” exclusivo para estudiantes en condición de rezago de dicha Sede y en modalidad virtual (excepto las pruebas escritas).
- Con visto bueno de lo anterior, dirigirse a la Escuela de Matemática de la UCR, específicamente al Departamento de Matemática Aplicada con el fin de solicitar la valoración respectiva de la propuesta y su eventual aprobación.
- Una vez aprobado lo anterior y tras contactada la población meta del proyecto (vía correo electrónico), gestionar con la Sede Interuniversitaria de Alajuela, la apertura del grupo exclusivo para ellos el siguiente semestre, con el fin de habilitar el grupo en el sitio “e-matrícula”, en el que los estudiantes realizan su matrícula a los cursos antes de cada periodo.

- Contactar al WebMaster (Lic. Edgardo Arita-Dubón) de alguna de las plataformas (Moodle de la Escuela de Matemática, plataforma donde se alojará el entorno virtual) con el fin de solicitar la creación del sitio correspondiente al curso.
- Una vez que el cursado vaya finalizando, ir recabando datos necesarios para elaborar un informe final, en el que se detalle de manera global y personal (alumno por alumno), lo que ha sido el proceso que se ha llevado a cabo.
- Presentar los resultados finales ante la Administración de la Sede Interuniversitaria y ante la Dirección del Departamento de Matemática Aplicada de la UCR con el fin de valorar la experiencia y analizar posibles opciones de continuidad del proyecto a corto o mediano plazo.

Aprendizaje y Tecnologías

En este apartado, ya se mencionó antes que el centro del curso girará en torno a una plataforma virtual. La misma será gestionada ante la Escuela de Matemática de la UCR y administrada por el docente en toda su dimensión. De esta plataforma, se echará mano a sus diversas herramientas para la implementación de clases y evaluaciones (éstas últimas realizadas dentro de la misma plataforma, por medio de bancos de preguntas que se fabricarán durante el proceso de construcción del entorno).

Por otra parte, se piensa emplear una diversidad de recursos como videos o presentaciones online elaboradas previamente (e incrustados en la plataforma para evitar “salir” de la misma). Uno de los retos que (a nivel personal) se piensan afrontar con este proyecto, es la inclusión de objetos de aprendizaje, para lo cual se emplearían diversos medios como Cuadernia o ExeLearning.

Para la elaboración de materiales referentes a teoría y práctica, se echará mano de software matemático (LaTeX, Geogebra, Mathematica, Maxima, entre otros), el cual provee toda la simbología matemática necesaria y además, permite (en los casos que se requiera), la manipulación de conceptos desde el punto de vista geométrico.

Volviendo a la plataforma, se utilizará su servicio de mensajería para establecer contacto directo con los estudiantes y sus diversas opciones para la entrega de trabajos. Como segunda opción a esto, se piensa establecer canales de comunicación externos a la plataforma como el correo institucional (dominio ucr.ac.cr) y en último caso, mediante Skype u otra herramienta que permita comunicación directa por voz y/o video de manera sincrónica.

Por último, se puede optar por una metodología de presentación de contenidos que las plataformas por sí mismas ofrecen (y por tanto, se configuran para tal fin), en las que se le presenta al estudiante todo lo referente a un tema en específico; listado de materiales obligatorios, materiales de apoyo y actividades, además de foros de consulta u otras herramientas necesarias, de manera que cada unidad o contenido se presenten como un “todo”.

Finalmente, se pretenden implementar al menos 1 foro de construcción por cada examen parcial, así como una wiki para aquellos temas en los que se preste para construcción colectiva de conceptos.

Tutoría

La tutoría en el curso a proponer estará basada en 3 ejes principales:

- Mediación constante mediante la publicación de clases cada semana, con el objetivo de ir marcando el ritmo de trabajo en el curso, el cual debe ser acorde el cronograma establecido en un primer momento.
- Mediación pertinente y moderada cuando se trata de actividades como foros y wikis, donde se deba realizar alguna retroalimentación a lo largo del camino que siguen los estudiantes en su trabajo, con el fin de ir encaminando los aprendizajes de la manera más correcta posible y con esto, dar un sentido más formativo a la evaluación.
- Mediación personalizada mediante los correos electrónicos o mensajes privados mediante la plataforma virtual, de manera que se traten las dificultades y se comenten los avances personales de cada alumno y con ello, hacerle sentir que los acompañamos en el camino de forma constante y personalizada.
- Se comienza con el ajuste del curso para ser impartido en la modalidad virtual: Diseño de un cronograma de trabajo y planeación de las actividades y recursos que estarán a disposición de los aprendices.
- Configuración del sitio virtual para tenerlo disponible de manera completa una vez que éste de inicio. Con ello, se iría semana a semana habilitando cada una de las clases y actividades relacionadas con ellas.
- Implementación en la propuesta una vez que se inició el semestre, donde se pueda aplicar la misma, coordinando con la cátedra todos los aspectos relevantes al mismo: reuniones, informes, elaboración de las evaluaciones, etc.

- Durante el desarrollo del cursado, recolectar información necesaria para la evaluación formativa y para lo que la administración requiera y solicite.
- Una vez que el cursado vaya finalizando, ir recabando datos necesarios para elaborar un informe final, en el que se detalle de manera global y personal (alumno por alumno), lo que ha sido el proceso que se ha llevado a cabo.

Cabe destacar que, por motivo de la naturaleza del curso, para éste se realiza un nombramiento docente de 3/8 de tiempo completo (15 horas semanales de 40). Por tal razón, se dedicará alrededor de unas 5 horas semanas a cada tipo de mediación señalada.

Material didáctico.

Si bien es cierto, se tratará de no caer en la línea de “virtualizar las clases presenciales” mediante la digitalización de textos, se espera poder emplear materiales didácticos acordes con la metodología teórico-práctica del curso, así como con el enfoque pedagógico elegido y bajo la premisa de que, por la virtualidad del curso, el estudiante deberá ser en algún grado, autodidacta. Por esta razón, habrá material de estudio obligatorio en el que se incluirá detalles teóricos y prácticos de forma que esté debidamente estructurado para garantizar un aprendizaje más autónomo por parte del aprendiente.

Por otro lado, los materiales didácticos serán en su mayoría de elaboración propia (cabe mencionar que el autor de este proyecto, tras su experiencia en el curso, ya cuenta con varios materiales que puedan servir de insumo para la elaboración de otros adecuados a la propuesta) y se incluirán algunos materiales de otros autores que se consideren pertinentes y necesarios. En relación con esto último y para evitar caer en acciones de plagio, se le recomendará libros de texto digitales a los estudiantes, los cuales se encuentran dentro de páginas como SlideShare o Scribd, para lo cual, se les dará el acceso mediante enlaces dentro del entorno virtual.

Los materiales a utilizar se basarán en su realización en los siguientes programas de software.

- Textos Matemáticos: LaTeX y sus compiladores
- Gráficos: Geogebra, Mathematica (Wolfram Alpha)
- Software para cálculo: Mathematica, Maxima (Este último es libre)

- Creador de Videos: Foto2avi, InShot, Minimovie.
- Creador de presentaciones web: Prezi
- Creador de documentos colaborativos: Google Drive.
- Objetos de Aprendizaje: ExeLearning y Cuadernia

7. EVALUACIÓN Y SEGUIMIENTO

Momentos de la evaluación

- Primer momento: En un inicio, se valorarán aspectos como la aprobación de la puesta en práctica de la práctica, así como de aspectos administrativos como por ejemplo, la oferta del curso y la apertura de matrícula. Asimismo, conforme se empiece a diseñar el entorno virtual, se irán valorando elementos como la presentación del mismo, los materiales y productos que se incluirán en éste, su funcionamiento, la prueba del método de matriculación de la plataforma y el diseño de clases y actividades, a fin de tenerlos a punto para su utilización una vez que el curso arranque.
- Segundo momento: Por iniciado el curso, se valorará cada unidad temática, una vez que haya sido cubierta en su totalidad, así como la validez de los ítems del banco de preguntas que se hayan empleado en distintas actividades online. Se valorará el progreso de los estudiantes conforme vayan realizando todas las actividades obligatorias que el sitio tendrá, así como desempeño a la hora de realizar cada una de las pruebas colegiadas.
- Tercer Momento: Al momento de que el curso finalice en su totalidad, se evaluarán los resultados obtenidos en cada estudiante y también de manera general, de manera que se puedan realizar un estudio en el que se analicen aspectos como porcentajes de aprobación/reprobación, además del rendimiento en pruebas escritas de cátedra vs. actividades en línea. Todo esto será insumo para la realización de un informe final a presentarse tanto al Área Administrativa de la SIA-UCR, como de la Escuela de Matemática.

Seguidamente, tras haber establecido los indicadores de evaluación de este proyecto, se pasan a establecer una serie de aspectos o criterios relativos a la labor de seguimiento de todos los partícipes del mismo. Se describen a continuación.

Seguimiento a la labor de coordinación docente-administrativa

- Recopilación de minutas de reuniones con cada uno de los miembros de personal administrativo de la Sede Interuniversitaria de Alajuela (Coordinador Académico General y de las Ingenierías Mecánica e Industrial, Coordinadora de curso de Matemática), así como con personal de la Escuela de Matemática de la UCR (Director de la Escuela, Director del Departamento de Matemática Aplicada, WebMaster del sitio Emoodle) en las que se comience a barajar la opción de impartir en curso en modalidad virtual y además, en todas las instancias posteriores una vez que éste sea aprobado, incluidos el proceso de matrícula, las fechas posteriores a cada examen y una reunión final al cierre del proyecto.

Seguimiento a la labor meramente docente

- Creación de fichas técnicas para cada uno de los materiales didácticos a desarrollar y subir en la plataforma. En ella se debe especificar el tipo de material, la cantidad de tiempo empleado en su diseño y armado, el formato y otros que se consideren pertinentes.
- Creación de carpeta (virtual) en la que se registre toda aquella intervención docente en la plataforma: desde la publicación de clases, materiales y evaluaciones, pasando por las intervenciones en actividades virtuales, seguido de la construcción de cada una de las secciones que compondrán el entorno, para posteriormente guardar registro de actividad tutorial (mensajes o correos internos) mediante capturas de pantalla.
- Creación de memoria final en la que se detalle todo lo acontecido en el proyecto: desde el planteo de la propuesta a las autoridades competentes, hasta la puesta en práctica del mismo con la descripción de todos los fenómenos acaecidos en cada uno de sus momentos.

Seguimiento a la labor de los estudiantes del curso

- Seguimiento de la actividad del estudiante a través de los registros brindados por la plataforma Emoodle (acceso a materiales, clases, descargas de archivos, reproducciones, intervenciones en foros, wikis y realización de las pruebas cortas online) por medio de las estadísticas que la misma plataforma recopila y se pueden exportar en archivo de Excel (Al menos una vez por semana hacer esto).
- Al igual que en el caso del docente, se puede crear un registro con toda la interacción hecha por cada alumno con el profesor, a fin de determinar el grado de acercamiento entre ambos y el tipo de interacción que muestran (dudas de la materia, dudas de ejercicios, otros).
- Registro externo de notas, obtenidas en cada uno de los exámenes parciales. Junto a esto, tal y como lo establece el Régimen de Reglamento Académico Estudiantil, a cada prueba escrita se le hará la debida retroalimentación y observaciones generales en cada uno de los ejercicios o problemas.

Seguimiento al cumplimiento de los objetivos

- Registro y análisis de todas las informaciones recabadas, una vez comenzado el armado del sitio web (fase previa) y el cursado (ejecución del proyecto), con el fin de detallar el alcance o no de cada uno de los objetivos propuestos.
- Creación de instrumentos u otros que permitan establecer relaciones entre la información recabada y los objetivos propuestos, en materia del alcance logrado.
- Establecimiento de medidas correctivas inmediatas (tanto en lo administrativo, pedagógico, didáctico, y estudiantil), en caso de que se detecten situaciones que no estén llevando a buen puerto las metas a cumplir.

Indicadores de evaluación

Como parte esencial en la ejecución de este proyecto, se procede a detallar una serie de indicadores de evaluación para diferentes categorías, las cuales se detallan a continuación, junto con dichos indicadores:

- Administración

- Aprendizaje y tecnologías
- Tutoría
- Materiales didácticos

Se establecerá una estructura para cada categoría siguiendo los modelos de la CONEAU en su "*Informe sobre educación a distancia*" (2004) y el de García Aretio (1998). Similar a lo establecido por CONEAU (2004), se propondrán algunos indicadores que serán estrictamente necesarios (imprescindibles) y otros que son altamente recomendables (deseables).

Comenzando con el detalle de cada una, se tendrán los siguientes indicadores de evaluación:

Respecto a la administración

Se detallan los siguientes:

- Estricta evidencia de comunicación y coordinación entre el docente a cargo del proyecto y los diferentes entes administrativos, para todos los aspectos que lo requieran (matrícula de estudiantes, informes finales de notas, reproducción y asignación de aulas para pruebas presenciales).
- Recomendablemente, considerar al profesor a cargo de la ejecución del proyecto como "profesor consejero", a fin de que tenga conocimiento de las cargas académicas que tendrán cada uno de los alumnos participantes.
- Recomendablemente, coordinar con el departamento de psicología de la UCR en la Sede Interuniversitaria de Alajuela, a fin de determinar si existen estudiantes que puedan acogerse a diversos tipos de adecuación curricular y las implicaciones de ellas en la forma de desarrollar el curso.

Respecto al aprendizaje y las tecnologías

Se enuncian a continuación:

- Estricta concordancia y evidencia del modelo pedagógico propuesto en cada uno de los aspectos del curso: programa del curso, materiales didácticos, actividades y tutoría.

- Recomendablemente, revisar el modelo pedagógico seguido en el curso en su modo presencial, con el fin de hacerle un balance al propuesto en este trabajo.
- Recomendablemente, establecer la mayor cantidad de actividades constructivas y fomentadoras de aprendizaje colaborativo, como las wikis y los foros.
- Recomendablemente, en aquellos aspectos en lo que el enfoque tradicionalista tenga un mayor peso (como los materiales didácticos, en los que se presentarán muchas veces los contenidos como algo ya establecido, por la naturaleza de los mismos), no dejar de lado detalles de carácter constructivo que puedan complementar lo presentado en el material, como por ejemplo, la prueba de resultados sencillos).

Respecto a la tutoría

Se enuncian los siguientes:

- Estricta evidencia de preparación y experiencia del docente en manejo de plataformas virtuales y las herramientas que éstas proveen.
- Estricta evidencia de elementos que permitan la consecución de los objetivos propuestos (tanto generales como específicos) en cada uno de los aspectos del curso: programa del mismo, materiales, tutoría y actividades.
- Recomendablemente realizar revisiones constantes de los materiales y actividades de evaluación realizadas, con el fin de determinar si cumplieron lo establecido en los objetivos.
- Recomendablemente, ver que las pruebas de cátedra (las cuales no son elaboradas por el profesor que tendrá a cargo la ejecución de la propuesta) a las que se someterán los estudiantes, sean planteadas teniendo en cuenta no sólo los estudiantes de la modalidad presencial, sino también a los de la modalidad a distancia.
- Estricto seguimiento continuo del proceso para determinar si la consecución o no de un objetivo se está dando o no. En caso de lo segundo, tomar las medidas necesarias para encaminarse al cumplimiento de dicho objetivo.
- Estricto manejo de herramientas multimedia por parte del docente, tanto para la elaboración didácticos como de la plataforma donde se trabajará, así como de herramientas comunicaciones para lo referente a tutoría.

- Recomendablemente, realizar la construcción del entorno virtual a utilizar con suficiente antelación, antes de ponerlo en marcha y empleando tanto medios y tipos de recursos como sea posible, para darle variedad al entorno y hacerlo llamativo al estudiante.
- Recomendablemente, valorar medios alternativos para tutoría, como Skype, Facebook Live o Telegram. (Whatsapp se descarta porque se desea privacidad para el tutor, en lo que respecta a su número de teléfono)
- Estricta presencia de instrumentos de evaluación (rúbricas, escalas de calificación) en cada actividad virtual, acordes a los objetivos planteados y previamente elaborados y revisados.
- Estricta evidencia de acople en cuanto al nivel esperado de aprendizaje en el curso de cada una de las pruebas y actividades realizadas mediante el entorno virtual.
- Recomendablemente, coordinar con la cátedra del curso (presencial), la propuesta de ejercicios y problemas en las pruebas cuyo nivel sea el adecuado para los estudiantes de ambas modalidades.
- Recomendablemente, construir con suficiente antelación los bancos de ítems que serán la base de pruebas online y revisar con detalle si éstos se encuentran bien planteados.
- Brindar una evaluación antes del cierre del ciclo, en la que los estudiantes externen en papel, el desempeño que ha tenido el docente durante el cursado.
- Estricta evidencia del registro del desempeño del estudiante, mediante herramientas como el cuaderno de calificaciones que facilitan las plataformas virtuales sobre las que se estructurará el curso.
- Estricta evidencia del uso de herramientas comunicacionales como el correo o mensajería interna de la plataforma, para establecer contacto y realizar mediación con los alumnos.
- Estricta evidencia de la recopilación de datos acerca del desempeño estudiantil en el curso, de manera individualizada.

Respecto al material didáctico:

El material didáctico, tanto en su elaboración como diseño, se evaluará con los siguientes indicadores:

- Estricto apego a los contenidos del curso, así como al modelo pedagógico a emplear en el proyecto.
- Estricta revisión constante de los materiales ya empleados, a fin de realizarles ajustes de forma o fondo que permitan mejorar su calidad para tenerlos a disposición para futuras experiencias.
- Recomendablemente, utilizar materiales que se ajusten a formatos de fácil acceso para el alumno, de manera que se garantice su acceso a la información consignada en dichos materiales.
- Recomendablemente, emplear formatos y herramientas de elaboración de recursos que permitan la creación de productos de “peso ligero”, es decir, que no vayan a saturar tanto el sitio virtual y que además no vayan a representar problemas para los estudiantes a la hora de la descarga debido a su gran tamaño y a la dependencia de un buena conexión a internet para lograrlo.
- Estricta inclusión de material pedagógico adicional al de lectura y tratamiento obligatorio, que permita complementar lo visto en cada unidad.

CRONOGRAMA

El proyecto se espera poder ser llevado a cabo a lo largo de 2 semestres como máximo. A continuación se muestra lo que, tentativamente, se planea hacer en cada uno de estos periodos:

Periodo	***Actividad***
I Semestre – Mes 1	Presentación de la Propuesta ante las autoridades se la SIA-UCR y la Escuela de Matemática de la UCR.
I Semestre – Mes 2	Solicitud de la apertura del entorno virtual. Adaptación del curso al entorno virtual.
I Semestre – Mes 3	Ubicación de posibles integrantes del grupo a ofertar. Comunicación con ellos vía correo electrónico. Elaboración de las 2 primeras unidades del curso en el

	entorno.
I Semestre – Mes 4	Apertura del grupo exclusivo y comunicación vía correo electrónico a los interesados. Matrícula de los estudiantes mediante el sitio ematricula.ucr.ac.cr Elaboración de las unidades 3 y 4 del curso.
I Semestre – Mes 5	Confirmación de matrícula y trámite de matrículas por inclusión (extemporáneas). Elaboración de unidades 5 y 6 del curso.
II Semestre – Mes 1	Arranque del curso y las actividades en la plataforma. Desarrollo de la Unidad 1 y arranque de la Unidad 2.
II Semestre – Mes 2	Recolección y tabulación de datos a nivel individual de las primeras evaluaciones realizadas en la plataforma. Desarrollo de la Unidad 2 y arranque de la Unidad 3.
II Semestre – Mes 3	Análisis de los resultados obtenidos después del I Parcial Colegiado y de las evaluaciones realizadas en el Mes 2. Informe Preliminar 1 a presentar a las autoridades de Sede y Escuela de Matemática. Desarrollo de las Unidades 3 y 4, arranque de la Unidad 5.
II Semestre – Mes 4	Análisis de los resultados obtenidos después del II Parcial Colegiado y de las evaluaciones realizadas en el Mes 3 Informe Preliminar 2 a presentar a las autoridades de Sede y Escuela de Matemática.

	Desarrollo de las Unidades 5 y 6.
II Semestre – Mes 5	Análisis de los resultados obtenidos después del III Parcial Colegiado y de los resultados finales de cada estudiante, contando aquellas que pudieran llegar a realizar prueba de aplazados (denominada Prueba de Ampliación). Elaboración y presentación del informe final de todo lo obtenidos tras la aplicación del proyecto.

9. PRESUPUESTO

Dentro de los aspectos contemplados como parte del presupuesto (monetario) de este proyecto, son los siguientes:

- Salario del docente a cargo de impartir el curso virtual: El profesor a cargo del curso (bajo la categoría de Profesor Interino Licenciado) es nombrado con una carga académica de 3/8 de tiempo completo (15 de 40 horas), con vigencia del 13 de Agosto del 2018 al 16 de Diciembre del 2018. De acuerdo a la escala salarial docente (actualizada para el II Semestre del 2018), el monto mensual a devengar a es de 467 606,19 colones (por concepto de salario base más pluses salariales)
- Costo de hosting y mantenimiento de la plataforma Moodle de la Escuela de Matemática: El manejo de la plataforma está a cargo del docente Lic. Edgardo Arita-Dubón, quien tiene una carga de ¼ de tiempo completo (10 de 40 horas) por el mantenimiento de dicha plataforma. De acuerdo a la escala salarial docente (actualizada para el II Semestre del 2018), el monto bruto mensual a devengar a es de 203 072 colones (por concepto de salario base). A lo anterior, deben sumarse una serie de rubros por concepto de pluses salariales los cuales no fueron especificados por el Prof. Arita.

10. BIBLIOGRAFÍA

- Bavio, Eduardo. et. al. (2004). “Comisión Asesora de Educación a Distancia; Informe Final”. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de Argentina.
- Consejo Universitario de la Universidad de Costa Rica (2001) “Reglamento de Régimen Académico Estudiantil”. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- García Aretio, Lorenzo (1998). “Indicadores para la Evaluación de la Enseñanza en una Universidad a Distancia”. Revista Iberoamericana de Educación a distancia, España.
- Programa del curso MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería. (2017). Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

DESARROLLO

DEL

PROYECTO

1. Nombre del Curso Virtual

MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería (Exclusivo para estudiantes en condición de rezago de la Sede Interuniversitaria de Alajuela)

2. Selección y justificación de las herramientas tecnológicas.

Selección

En primera instancia, se ha optado por elegir la plataforma tecnológica sobre las cual se estructurará el curso: la plataforma Moodle de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR). La misma se viene utilizando en diversos cursos de la escuela desde el año 2014. A nivel de Sede Interuniversitaria de Alajuela, la plataforma se viene empleando desde el año 2014, primeramente como un medio de alojamiento de información y documentos, pero paulatinamente con los años se ha ampliado el uso de la misma con la explotación de nuevas herramientas, como los foros de consulta (para comunicación asincrónica con los estudiantes, especialmente a aquellos que por razones de horario no pueden asistir a las horas de atención individual). Es por esta experiencia en trabajar con esta plataforma y la facilidad en el manejo de muchas de sus herramientas que se realiza la elección de ésta para el planteo y ejecución del presente Proyecto de Intervención.

Además de la experiencia con la que se cuenta en el manejo de la plataforma Moodle, la riqueza de herramientas y posibilidades que ésta ofrece también ha sido un factor a tomar en cuenta para su elección. Dentro de éstas, se encuentran las siguientes:

- Permite la realización de Foros y Wikis: Éstas, además de propiciar el trabajo colaborativo en la virtualidad, también permiten medir el desempeño y el alcance de logros por parte de participantes, ya que quedan evidencias tanto de las participaciones iniciales como de las intermedias (en donde se haya tenido que rectificar algún concepto o idea) y las finales (para resumir los aprendizajes logrados y los puntos en que se puede mejorar).

- Permite realizar evaluaciones dentro de sí misma: Se pueden construir pruebas en las que se configuran plazos, números de intentos y cantidad de ítems por prueba (Así como la obligatoriedad de las mismas y el otorgamiento de una calificación que puede registrarse en el llamado “Libro de Calificaciones”). Los ítems se pueden elaborar con anterioridad y existen diversidad de tipos. La existencia de un Cuaderno de Calificaciones, en el que se registren todas las notas obtenidas en las distintas actividades, permite al estudiante ir conociendo su nivel de progreso.

- Existe la posibilidad de subir archivos (audio, video, documentos pdf, imágenes, etc.), así como la opción de incrustar elementos a páginas del sitio. La carga de archivos no solamente puede ser de parte del tutor virtual, sino de los participantes también, pues en las opciones foro y wiki existen tales opciones. Además, la presentación de los recursos se puede hacer por medio de varias maneras, como la apertura de ventanas emergentes de previsualización o la descarga directa, en el caso de archivos.

- El curso se puede presentar en diversidad de formatos. Para efectos de este Proyecto, dada la delimitación del curso en 6 capítulos diferentes, se ha optado por el formato de temas, ya que permite agrupar todos los recursos y actividades relacionadas con un mismo tópico en uno sólo de ellos. Además de ello, permite una fácil navegación entre temas distintos. Los nuevos temas se irán habilitando una vez que hayan culminado aquellos que los preceden, pues el curso está estructurado de manera lógica. Es decir, para el estudio de los nuevos temas, se requiere del manejo de los anteriores (los cuales permanecerán habilitados hasta el final de curso, por si el estudiante requiriera devolverse en algún momento a consultar algo sobre los temas pasados). Aparte de los 6 temas habilitados (uno por capítulo del curso), se habilitarán otros 2 que serán los primeros en orden de aparición, comenzando por el tema en el que aparecen generalidades del curso, como el programa (Guía Didáctica), el cual se presentará tanto en formato de páginas (para navegación, una por cada apartado del programa) como en formato pdf (para descarga directa), junto con los foros de consultas. El segundo tema será una especie de pequeño repositorio, en el que estarán disponibles algunos textos (pertenecientes a la bibliografía del curso), carpetas comprimidas con exámenes de ciclos anteriores para practicar, listas de ejercicios, material alusivo a los cursos anteriores (para quienes deban repasar contenidos considerados como conocimiento previo fundamental para el curso), entre otros.

- La plataforma cuenta con un espacio para la mensajería interna, el cual será el principal canal de comunicación entre el tutor y los participantes. La notificación del mensaje enviado la recibirán por medio de un correo electrónico enviado a la cuenta institucional propiedad del participante, la cual se recibe prácticamente de forma instantánea.

- Existencia de una aplicación móvil para la navegación (Moodle Mobile), la cual permite el acceso a los diferentes recursos de la plataforma sin tener que Accesar directamente desde el sitio web y ésta se halla disponible para los distintos sistemas operativos (Android, IOS, y Windows), lo que permite la descarga, ejecución y uso en prácticamente cualquier dispositivo móvil.

- En vista de la posibilidad de que los servidores puedan fallar, la plataforma Moodle da la opción de crear una copia de seguridad descargable y con todas las opciones que previamente se elijan para salvar. Esto es un factor a tomar en cuenta en caso de alguna eventualidad o bien, para tener un respaldo con el que se pueda en su momento volver a cargar el curso y modificarlo para otros fines.

- El sitio Moodle da la posibilidad de acceder a un registro de actividad por parte de cada participante, el cual se puede descargar y ver detalle a detalle, cada uno de los accesos, la fecha, hora y recurso accedido. Esto permite monitorear la actividad del estudiante y con ello, poder realizar intervenciones o comunicación por medios más expeditos, en caso de que se detecte poca o nula actividad.

- Moodle también permite la inserción de etiquetas que van desde simple texto, hasta imágenes. Esto permite darle al entorno un enfoque más estético y atractivo para el estudiante.

Justificación

Cada una de las potencialidades expuestas de la plataforma Moodle de la Escuela de Matemática de la UCR será aprovechada en determinada medida. A continuación, se especifica cada uno de los usos que se le darán a cada herramienta:

- Foros: Para comunicar dudas que surjan con el estudio de los diversos temas (Foro de Consultas) y como espacio de construcción de nuevos aprendizajes (Debates o intercambios de conocimiento en algunos de los temas del curso).

- Página: Se empleará inicialmente como medio para la publicación de la Guía Didáctica del curso, además de ser el recurso a emplear para la publicación de cada una de las clases virtuales.

- Wikis: Para la construcción de algunos esquemas o formularios de manera colaborativa entre los participantes, de manera que se entregue un producto final que sea para uso de todos quienes lo elaboraron.

- Subida de archivos: Se empleará paralelamente con el uso de los foros, de manera que puedan subir imágenes o videos con un límite de peso en MB y ser más específicos con el asunto por el cual se dirige una consulta hacia el tutor.

- Mensajería Interna: Se utilizará como canal principal de comunicación, aunque en casos en que la comunicación deba ser muy pronta o inmediata, puede hacerse uso de otras herramientas como Telegram.

- Libro de Calificaciones: Para consignar todas las notas obtenidas tanto en las pruebas presenciales, como para consignar la realización de tareas o trabajos que no tengan peso cuantitativo en la nota pero que sean estrictamente obligatorias en cuanto a su realización.

- Registro de Actividad: Para dar seguimiento a cada uno de los participantes en cuanto al acceso a la plataforma, su frecuencia de uso y los recursos consultados.

- Pruebas: Para darle al estudiante la oportunidad de autoevaluarse y permitirle medir su desempeño antes de las pruebas presenciales.

- Etiquetas: Para darle un aspecto más estético al curso y para delimitar en cada tema, cada uno de los recursos puestos a disposición.

Todo lo anterior resume las razones concretas sobre la elección de la plataforma virtual para dar soporte al curso propuesto en este Proyecto de Intervención.

3. Planificación de las clases.

De acuerdo a lo planteado en el módulo, se establecerán 3 clases en las que se abarcará todo lo referente al Capítulo I del curso MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería, tal y como se ha expuesto en la Guía Didáctica.
El desglose de cada una de estas tres clases se detalla a continuación:

Clase 1: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales; conceptos y terminología básica. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden en variables separables y reducibles a ellas.

Objetivos: Corresponden a los siguientes:

- Comprender los conceptos básicos e introductorios del curso para aplicarlos a la solución de ejercicios.

- Aplicar conocimientos previos de las materias anteriores en el descubrimiento de técnicas para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, con el fin de resolver ejercicios y problemas concretos que involucren tales ecuaciones.

Contenidos de la clase:

- Conceptos básicos:
    1. Ecuación Diferencial (Concepto, ED Ordinaria, ED Parcial)
    2. Orden de una ED.
    3. Solución de una ED.

- Ecuaciones Diferenciales en Variables Separables y Reducibles a Ellas:
    1. Método de Solución
    2. Ecuaciones Reducibles a Variables Separables mediante cambios de variable dependiente
    3. Caso especial: Ecuaciones Homogéneas y reducibles en ellas.

Recursos Multimediales: Los que se emplearán en esta primera clase son:

- Presentación Prezi: Se usará una presentación realizada con esta herramienta para presentar conceptos básicos sobre Ecuaciones Diferenciales. La misma se incrustará en la clase una vez esté lista.

- Video explicativo sobre el tema de ecuaciones diferenciales en variables separables, con ejemplos. El video se elaborará con Powtoon o Movie Maker y será subido al canal de YouTube del docente para luego ser insertado en la ventana de la clase.

- Imágenes ilustrativas de conceptos básicos de las ED aplicados al planteamiento de tales ecuaciones. Se realizarán con PicsArt o PiZap, empleando capturas de pantalla de texto matemático procesado previamente con un editor. Se subirán directamente a la página de la clase.

- Imagen del docente-tutor del curso: Subida directamente a la página de la clase. Se aplicará este recurso en cada una de las clases publicadas.

- Imágenes en formato gif obtenidas a partir de la inserción de código LaTeX en el espacio para texto de la página donde se publicará la clase, las cuales especificarán procedimientos o fórmulas matemáticas que no es posible escribir con las herramientas ofrecidas por el editor de texto de la plataforma.

Bibliografía: Se usarán las siguientes referencias:

- González, Daniel (2018). “Capítulo 1 - Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden”. Versión 1.0. Sede Interuniversitaria de Alajuela, Universidad de Costa Rica.

- Kiseliov, A. et al. (1984). “Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”. 4ta Edición. Editorial MIR. Moscú, Rusia. Recuperado de: https://es.scribd.com/doc/111005690/Problemas-Ecuaciones-Diferenciales-Ordinarias-Kiseliov-Krasnov-Makarenko

- Zill, Dennis. (2006). “Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado”. 8va edición. Cengage Learning, México. Recuperado de https://es.scribd.com/document/61200082/Ecuaciones-Diferenciales-Zill-8va-Ed-l-PDF

NOTA: Las últimas 2 referencias estarán disponibles en el entorno, incrustados en formato de página.

Actividades: Para la primera clase, la actividad que se propone es el inicio de la elaboración de un glosario (el cual, de manera opcional, deberán ir enriqueciendo a lo largo del curso). La consigna es la siguiente:

- Se propone una serie de conceptos, de los cuales se selecciona uno a elegir. La definición debe ir acompañada de un ejemplo ilustrativo y será sometida a revisión. En caso de contar con el visto bueno del docente, se otorga el grado de aprobación.

Plazo: 7 días desde el momento en que la actividad es habilitada en la plataforma.
Los criterios de evaluación de la realización de la actividad “Glosario” (Habilitada directamente en el Moodle, pues éste lo posee como herramienta), para valorar la aprobación de la actividad son:

- Cumplimiento del plazo de entrega y del número de intervenciones pedidas.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

Foro: Se detalla a continuación la consigna relativa al primer foro planteado:

Foro #1: Construyendo nuestro propio concepto de Solución de una Ecuación Diferencial

El proceso de comprobación para saber si una función es o no, solución de una ED, requiere básicamente de técnicas y procedimientos ya conocidos por ustedes, como la derivación (simple e implícita), así como de la realización de operaciones y aplicación de propiedades y leyes...

Con base en estos elementos:

¿Cómo se puede definir, de la forma más lógica, amplia y detallada, el concepto de solución de una ecuación diferencial?

Plazo: 7 días, contados a partir del momento de la publicación del foro en la plataforma.

Clase 2: Otros tipos de ecuaciones de primer orden: Las ecuaciones exactas y las reducibles a ellas por medio de factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden y reducibles a ellas mediante cambios de variable.

Objetivos: Corresponden a los siguientes:

- Reconocer ecuaciones diferenciales exactas o reducibles a ellas a través del cálculo de factores integrantes, con el fin de resolver problemas y ejercicios que involucren estas ecuaciones.
- Reconocer elementos de las ecuaciones diferenciales reducibles a lineales con el fin de aplicar los cambios de variable adecuados que permitan resolver las ecuaciones resultantes de tales cambios.

Contenidos de la clase:

- Ecuaciones Exactas y Reducibles a Ellas:
    1. Ecuaciones Exactas: Método de Solución
    2. Ecuaciones Reducibles a Exactas mediante Factor Integrante: Casos en una y dos variables.
- Ecuaciones Lineales de Primer Orden y Reducibles a Ellas
    1. Ecuaciones Lineales de Primer Orden Homogéneas y No Homogéneas.
    2. Ecuaciones Reducibles a Lineales: Ecuación de Bernoulli, Ecuación de Riccatti, Ecuación de Segundo Orden con variable ausente.

Recursos multimediales: Para esta clase, se piensa utilizar los siguientes:

- Video “Ejemplo 1 de una ED reducible a Exacta mediante un Factor Integrante”

  Video corto que explica la solución de un ejemplo de ecuación reducible a exacta por medio de un factor integrante. Disponible en https://youtu.be/tQjvTyYbKH8
- Video “Ejemplo 2 de una ED reducible a Exacta mediante un Factor Integrante”

  Otro pequeño video corto con otro ejemplo de factor integrante, con una variante en la aplicación de factor integrante. Disponible en https://youtu.be/Ps1k68bjbTk
- Imágenes elaboradas con PicsArt, PiZap u otro recurso similar que ilustren algunas fórmulas de utilidad que aparecen en el estudio de los temas de estudio tratados en la clase (fórmulas para comprobar la exactitud de una ecuación, cálculo de factores integrantes, etc.)

Bibliografía: Se usarán las siguientes referencias:

- González, Daniel (2018). “Capítulo 1 - Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden”. Versión 1.0. Sede Interuniversitaria de Alajuela, Universidad de Costa Rica.

- Lacy, Allan (2017). Lista 1 de Ejercicios I Parcial. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Disponible en: http://emoodle.emate.ucr.ac.cr/pluginfile.php/170656/mod_resource/content/3/MA1005_I2017_Lista1Ejercicios.pdf

- Kiseliov, A. et al. (1984). “Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”. 4ta Edición. Editorial MIR. Moscú, Rusia. Recuperado de:

https://es.scribd.com/doc/111005690/Problemas-Ecuaciones-Diferenciales-Ordinarias-Kiseliov-Krasnov-Makarenko

- Rosales, J. (2016). Lista de Ejercicios 1. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Recuperado de: http://emoodle.emate.ucr.ac.cr/pluginfile.php/170655/mod_resource/content/6/Lista1-II-2016-MA-1005.pdf

- Zill, Dennis. (2006). "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado". 8va edición. Cengage Learning, México. Recuperado de https://es.scribd.com/document/61200082/Ecuaciones-Diferenciales-Zill-8va-Ed-I-PDF

Actividades: Se cuentan con 2 actividades para esta clase.
La primera será una Wiki, para la que se establece la siguiente consigna:

- Elaboración grupal de un esquema o diagrama (de flujo, mapa conceptual, etc.) en la Wiki donde se detalle todo lo especificado en el Foro #2, respecto a la identificación de una ED de primer orden y la descripción de un proceso de solución de la ED una vez que ésta haya sido identificada.

Plazo: 4 días, contados a partir del momento de publicada la consigna.
Los criterios de evaluación de la Wiki, para valorar la aprobación de la actividad son:

- Cantidad y pertinencia de las participaciones
- Cumplimiento del plazo de entrega.
- Coherencia matemática
- Presentación visual
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

Foro: Se detalla a continuación la consigna relativa al segundo foro planteado:

Foro #2: ¿Cómo determinar el tipo de ED de primer orden?

El estudio de los distintos tipos de ED de primer orden ha provisto de diversas formas de resolución de dichas ED. Esto implica saber, a priori, cómo reconocer una ED para luego poder escoger el método de solución apropiado. Es por eso que, se le plantea la interrogante:

¿Qué elementos o detalles en el planteamiento de una ecuación diferencial son los más importantes para identificar con facilidad el tipo de ED y consecuentemente, su método de solución?

Plazo: 4 días

Clase 3: Algunas aplicaciones de las ED de primer orden a otras disciplinas.

Objetivos: Corresponden a los siguientes:

- Aplicar las ecuaciones diferenciales de primer orden en la formulación de problemas ligados a otras disciplinas, con el fin de resolver problemas concretos que simulen situaciones reales o cercanas a la realidad.
- Aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad en la solución de ejercicios, con el fin de determinar la región del plano xy en la que un problema de valor inicial posee única solución.

Contenidos de la clase:

- Aplicaciones de las ED de primer orden
    1. Ecuación Diferencial de una familia uniparamétrica de curvas.
    2. Trayectorias Ortogonales
    3. Crecimiento poblacional
    4. Mezclas Químicas
    5. Ley de Enfriamiento de Newton
- Teorema de Existencia y Unicidad de la solución de una ED de primer orden.

Recursos multimediales:

- Presentación Prezi: Se usará una presentación (la cual abrirá en ventana emergente) para presentar las aplicaciones antes descritas. La misma se incrustará en la clase una vez esté lista.
- Video explicativo sobre algunas aplicaciones. El video se elaborará con Powtoon o Movie Maker y será subido al canal de Youtube del docente para luego ser insertado en la ventana de la clase.
- Imágenes ilustrativas de las aplicaciones, como gráficos de las funciones obtenidas de la resolución de una ED que representa algún modelo y su interpretación. Se realizarán con PicsArt o PiZap y se subirán directamente a la página de la clase.

Bibliografía: Se usarán las siguientes referencias:

- González, Daniel (2018). “Capítulo 1 - Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden”. Versión 1.0. Sede Interuniversitaria de Alajuela, Universidad de Costa Rica.

- Lacy, Allan (2017). Lista 1 de Ejercicios I Parcial. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Disponible en: http://emoodle.emate.ucr.ac.cr/pluginfile.php/170656/mod_resource/content/3/MA1005_I2017_Lista1Ejercicios.pdf

- Kiseliov, A. et al. (1984). "Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias". 4ta Edición. Editorial MIR. Moscú, Rusia. Recuperado de: https://es.scribd.com/doc/111005690/Problemas-Ecuaciones-Diferenciales-Ordinarias-Kiseliov-Krasnov-Makarenko

- Rosales, J. (2016). Lista de Ejercicios 1. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Recuperado de: http://emoodle.emate.ucr.ac.cr/pluginfile.php/170655/mod_resource/content/6/Lista1-II-2016-MA-1005.pdf

- Zill, Dennis. (2006). "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado". 8va edición. Cengage Learning, México. Recuperado de https://es.scribd.com/document/61200082/Ecuaciones-Diferenciales-Zill-8va-Ed-I-PDF

Actividades: Habrá una actividad en esta clase; una prueba corta virtual (sobre los temas de las 2 primeras clases). Se detalla la consigna a continuación:

- Se presentan 5 ejercicios de selección única, dispuestos al azar que deben responderse en un máximo de 2 intentos, para lo cual se cuenta con una hora de tiempo a partir del momento en que se inicia un intento.

  Plazo: La prueba estará disponible durante 7 días desde el momento de la publicación de la Clase 3.

Foro: El foro que se habilitará paralelamente a esta clase, es el siguiente:

Foro #3: Interpretando gráficamente el Teorema de Existencia y Unicidad.

El Teorema de Existencia y Unicidad nos indica las condiciones necesarias para poder garantizar que un problema de valor inicial, conformado por una ecuación diferencial de primer orden y un valor particular de la función solución, tenga una única solución en una determinada región del plano xy. A partir de esto:

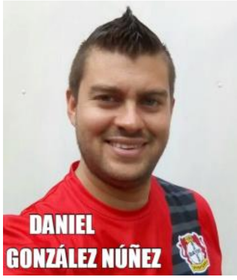
¿Cómo se interpreta gráficamente el Teorema de Existencia y Unicidad, aplicado a un ejemplo en concreto?

Plazo: 7 días desde el momento en que se publica la clase, junto con la consigna del foro.

4. Redacción de las clases.

En virtud del anterior planeamiento de las clases, se expone en este apartado el desarrollo de las mismas.

Clase 1: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales; conceptos y terminología básica. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden en variables separables y reducibles a ellas.



¡Bienvenidos formalmente a nuestra primera clase virtual del curso!

Arrancamos esta travesía que durará todo el semestre y en la que semana a semana iremos adentrándonos poco a poco en esta apreciable rama de la Matemática.

Y lo primero que hacemos, casi de forma natural, es preguntarnos:

¿Qué es una Ecuación Diferencial?

Bueno, ya desde la secundaria ustedes han de saber que una ecuación no es más que una igualdad que involucra cantidades tanto conocidas como desconocidas… Pero, ¿A qué nos referiremos con "diferencial"?

Definición de Ecuación Diferencial

Vamos a empezar a responder a esta pregunta con el siguiente ejemplo:

¿Existe alguna función que sea igual a su derivada?

Si traducimos esta pregunta a lenguaje matemático, entonces lo que nos preguntamos es si existe una función y tal que:

$$y' = y$$

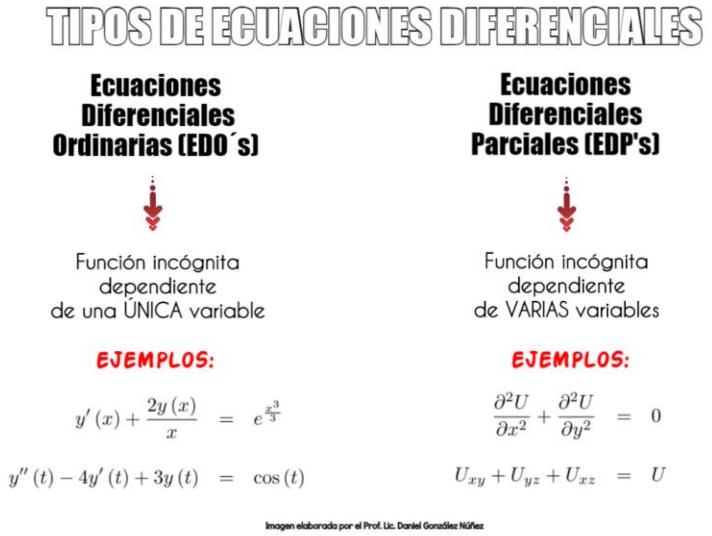
Del conocimiento adquirido en los cursos previos, ya tenemos una respuesta a esta interrogante; se trata de la función:

$$y = e^x$$

Ahora bien, la igualdad establecida antes, corresponde a una ecuación y como toda ecuación, tiene cantidades conocidas y desconocidas (o variables). Particularmente, en este caso notamos que la variable de la ecuación corresponde a una función (y) y además de ella, está involucrada su derivada. **Esto en esencia, es una ecuación diferencial… Es una ecuación que cuya incógnita es una función y en la que están presentes dicha función y/o algunas de sus derivadas, hasta de orden "n", así como funciones o expresiones que dependen de la(s) variable(s) independiente(s) de la función incógnita.**

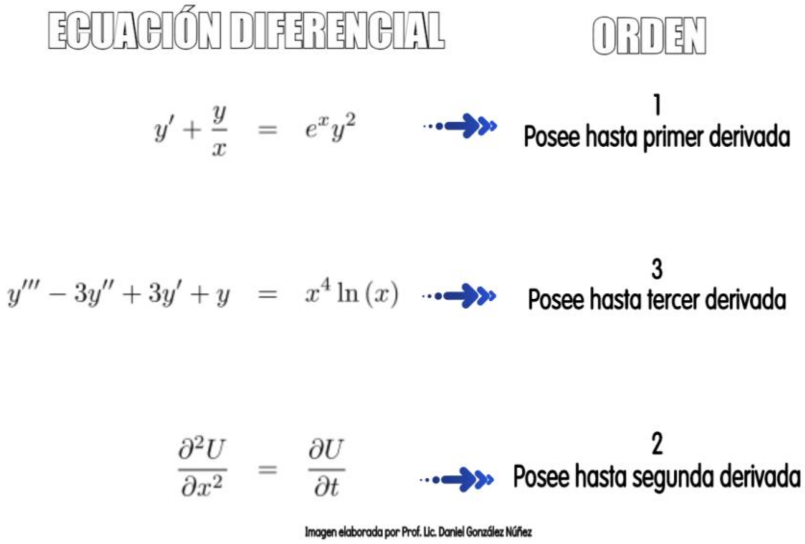
Tipos de ecuaciones diferenciales

La cantidad de variables independientes de la función incógnita nos dice permite clasificar las ecuaciones diferenciales en dos tipos, a saber:



Orden de una ecuación diferencial

Como recién vimos en la definición, en las ecuaciones diferenciales pueden estar presentes derivadas de hasta orden "n". Eso nos permite deducir el **concepto de orden**, pero en este caso de la ecuación diferencial: **Será aquel que corresponde al mayor orden de las derivadas presentes en la ED.** Siendo así, podemos ver lo siguiente:



Solución de una ecuación diferencial y tipos de solución de una ED.

Continuando un poco con la parte conceptual y volviendo al ejemplo de la ecuación:

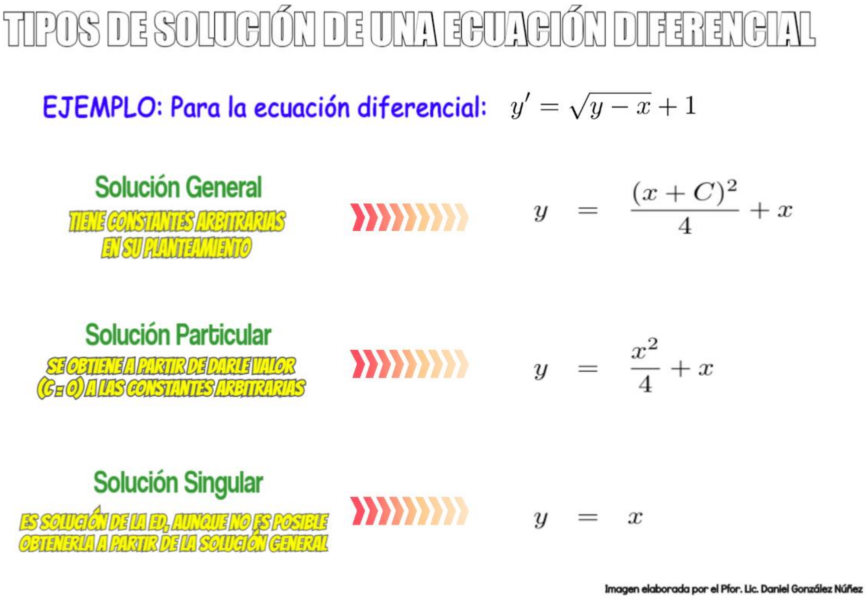
$$y' = y$$

Indicamos que la función

$$y = e^x$$

Era solución de esta ecuación, dado que satisfacía la igualdad planteada. Con base en esto, podemos ver que **la solución de una ecuación diferencial es una función (definida en un intervalo adecuado) que satisface la dicha ecuación diferencial; es decir, aquella que hace que la igualdad planteada, sea verdadera.**

Existen 3 tipos de solución de una ecuación diferencial, las cuales se resumen de manera ejemplificada en la siguiente imagen:



Un resumen de los conceptos previamente tratados se encuentra disponible en la siguiente presentación:

http://prezi.com/t3c6f1ka0qkm/?utm_campaign=share&utm_medium=copy

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: Ecuaciones en variables separables.

Nos adentramos ahora en el estudio de casos particulares de ecuaciones diferenciales y sus métodos de solución. Comenzamos dicho estudio con ecuaciones de primer orden, las cuales están conformadas por la primera derivada de la función incógnita (sí o sí debe aparecer en la ED), así como por la función incógnita y expresiones que dependan de ella y de la variable independiente (no es estricto que aparezcan en la ED).

El primer tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden que veremos, son unas que poseen un método de solución particularmente muy sencillo: **Las ecuaciones en variables separables.**

¿Pero qué quiere decir la frase “variables separables”? Ya sabemos que nuestra ecuación tiene una incógnita que corresponde a una función (que a su vez es variable dependiente de otra variable, llamada independiente (generalmente se usa “x” o “t”). Entonces, suponiendo que nuestra función incógnita es

$$y = y(x)$$

Lo que procede es a aplicar una serie de propiedades y procedimientos que nos permitan agrupar términos correspondientes a cada variable de un solo lado de la ecuación diferencial, partiendo del hecho que:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Una vez lograda dicha agrupación, debemos llegar a un resultado como el siguiente:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

Nuestro propósito es, en buena teoría, poder despejar la variable dependiente en términos de la independiente. Para ello, note que debemos "deshacernos" de los diferenciales… ¿Y cómo lo hacemos? Bueno, recordemos que los diferenciales guardan alguna familiaridad (¡aunque no son lo mismo!) y que un proceso "inverso" a ellos, es la **integración.** Es por ello que, debemos realizar esta operación a ambos lados de la igualdad anterior, para luego poder efectuar, en los casos que sea posible, el despeje de nuestra incógnita (existirán casos donde despejar la incógnita sea muy difícil, engorroso y hasta imposible, por lo que se aconseja dejar la solución de forma implícita).
Veamos el siguiente video ilustrativo con un par de ejemplos muy simples de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver mediante variables separables:

https://www.youtube.com/watch?v=KfTp8Pi8DVw&rel=0

Ecuaciones reducibles a separables mediante cambios de variable.
No podemos esperar que todas las ecuaciones diferenciales de primer orden puedan ser resueltas mediante variables separables… Sin embargo, existen casos donde es posible realizar cambios de variables (sustituciones de la variable dependiente y de su derivada) que permiten obtener ecuaciones diferenciales cuya forma si es compatible con la separación de variables.
Un claro ejemplo de ello se puede apreciar por medio del siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=B_wwGZKVTnc&rel=0

Hay un caso de estas ecuaciones diferenciales reducibles a separables que merece especial atención. Procedemos a describirlo:
Un caso especial: La Ecuación Homogénea.
Las ecuaciones diferenciales homogéneas serán aquellas de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

Las reconoceremos a partir de alguna de las siguientes características:

- Los términos de la función f(x,y) tienen todos el mismo grado (cuando se trate de polinomios, división de polinomios e incluso, radicales).

- Los términos de la función f(x,y) se pueden escribir todos en términos de y/x, es decir:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

La forma de resolver estas ecuaciones, sea cual sea la forma en que se planteen (según las anteriores), se resuelve haciendo el planteamiento:

$$u = \frac{y}{x} \;\rightarrow\; y = ux \;\rightarrow\; y' = u'x + u$$

Luego de ello y un poco de simplificación, obtenemos una ecuación en variables separables, la cual ya sabemos cómo resolver. Después de resolverla, es importante recalcar que se debe regresar a las variables originales.
Un pequeño ejemplo en video se muestra en seguida:

https://www.youtube.com/watch?v=UOKvNNeCLm0&rel=0

ASIGNACIONES

Tras la lectura del material obligatorio del capítulo (primeras 15 páginas) y estudio de esta clase, se les proponen las siguientes actividades:

1. Elaboración de un glosario: En este enlace, se proponen una serie de conceptos, de los cuales se selecciona uno a elegir y elaborar una definición propia del mismo en el glosario, de manera que entre todos construyan una base común de definiciones a las que pueden accesar en cualquier momento. La definición debe ir acompañada de un ejemplo ilustrativo y será sometida a revisión por parte del docente, una vez que ésta haya sido elaborada y el participante le notifique, mediante mensajería interna. En caso de contar con el visto bueno del docente, se otorga el grado de aprobación.

Los criterios de evaluación de esta actividad serán los siguientes:

- Cumplimiento del plazo de entrega.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

Se disponen de 7 días para cumplir a cabalidad con esta asignación, desde el momento en que la actividad es habilitada en la plataforma (se activa al mismo tiempo que la clase).

2. Foro de construcción: Los invitamos desde ya a nuestro primer foro se puede acceder haciendo click sobre el siguiente título:

Foro #1: Construyendo nuestro propio concepto de Solución de una Ecuación Diferencial

Reciban la más cordial bienvenida a este primer espacio conjunto de interacción. En este espacio vamos a intercambiar de manera conjunta y colaborativa, nuestras percepciones sobre el concepto de solución de una ecuación diferencial, de forma que al final de dicho intercambio, logremos englobar todo lo expuesto y fusionarlo en una definición producto del aporte de todos ustedes.

El proceso de comprobación para saber si una función es o no, solución de una ED, requiere básicamente de técnicas y procedimientos ya conocidos por ustedes, como la derivación (simple e implícita), así como de la realización de operaciones y aplicación de propiedades y leyes...

Con base en estos elementos:

¿Cómo se puede definir, de la forma más lógica, amplia y detallada, el concepto de solución de una ecuación diferencial?

Debe proporcionar una respuesta amplia y utilizando sus propias palabras. Puede valerse de referencias externas pero su respuesta debe ser lo más original posible. Para esto, tendrá que tener en cuenta también lo ya comentado por otros participantes.

Además de la intervención propia, debe replicar al menos la intervención de 2 compañeros, en las que complemente o refute lo planteado por ellos, proporcionando argumentos e inclusive, ejemplos válidos.

Se dispone de una semana (7 días) a partir del momento en que se habilita el foro, para realizar todas las participaciones solicitadas. El mismo se cerrará al 00:00 del día siguiente de la fecha límite y a partir de ese momento, no se recibirán más intervenciones, incluyendo aquellas que se hagan llegar por otros canales como la mensajería interna.

La aprobación de la actividad estará sujeta a los siguientes criterios:

- Cumplimiento del plazo de entrega y del número de intervenciones pedidas.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

Así mismo, ya pueden ir practicando sus nuevos conocimientos, resolviendo los ejercicios disponibles en los libros de Kiseliov et. al. y el de Dennis Zill.
¡Adelante, que tenemos mucho por hacer y aprender!

DANIEL

Clase 2: Otros tipos de ecuaciones de primer orden: Las ecuaciones exactas y las reducibles a ellas por medio de factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden y reducibles a ellas mediante cambios de variable.

¡Comenzamos nuestra segunda semana de trabajo con más para aprender de este mundo de las ecuaciones diferenciales!

Después del estudio de los conceptos básicos y un primer tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden, como lo son las de variables separables y algunos casos reducibles a ellas (entre las que destacaron las homogéneas), proseguimos con el estudio de más tipos y sus métodos de solución.

Ecuaciones Exactas: Métodos de solución

Continuando con el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, nos encontramos con las denominadas “Ecuaciones Exactas”, las cuales son aquellas que, al plantearse de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Deben satisfacer la siguiente igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esta estructura coincide con el resultado de obtener el denominado “Diferencial total” de una función de 2 variables, la cual se halla igualada a 0. En términos más precisos, esto es el resultado de aplicar el denominado diferencial total a la función

$$\varphi(x,y) = C$$

La cual será la solución de la ecuación diferencial exacta. Es decir, así se plantea la solución. Pero… ¿Cómo la encontramos? Prestemos atención al siguiente esquema:

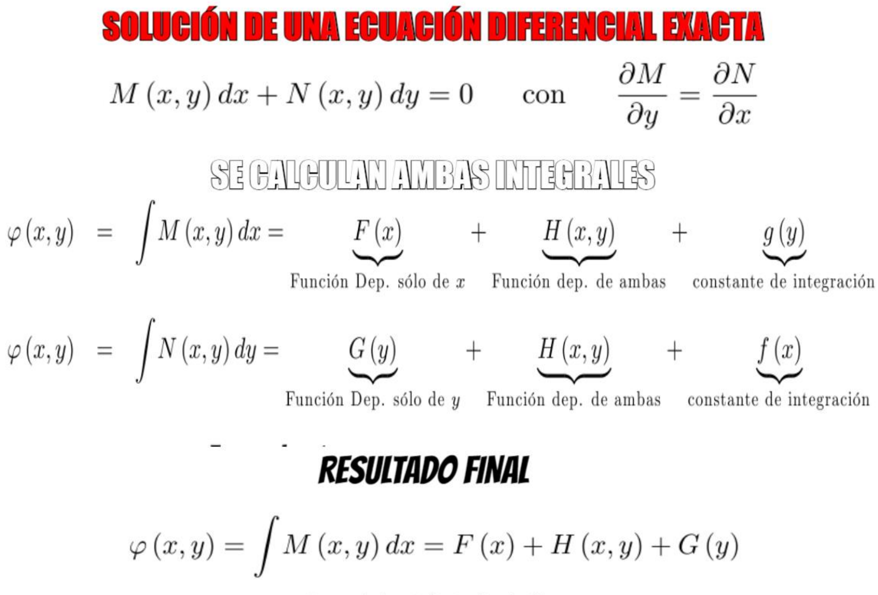


Imagen realizada por Prof. Lic. Daniel González Núñez

Ahora bien, nos adentraremos en un problema de mayor dificultad… ¿Cómo proceder en los casos en los que la ecuación diferencial, a pesar de poseer la estructura definida anteriormente, no cumple la igualdad entre las derivadas parciales antes mencionada? De esto nos ocupamos en el siguiente apartado.

Ecuaciones Reducibles a Exactas por medio de factores integrantes.

Cuando una ecuación diferencial esté planteada como

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Pero se tenga que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces, debemos buscar una función llamada factor integrante, al multiplicar todos los términos de la ED original (que no era exacta) hace que dicha ecuación ahora si lo sea. Las fórmulas para ello se especifican en el siguiente esquema:

CÁLCULO DE FACTORES INTEGRANTES PARA ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS

CASO 1: FACTOR INTEGRANTE DEPENDIENTE DE X

$$A(x) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int A(x)dx}$$

CASO 2: FACTOR INTEGRANTE QUE DEPENDE DE Y

$$B(y) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)} \Longrightarrow \mu(y) = e^{\int B(y)dy}$$

CASO 3: FACTOR INTEGRANTE QUE DEPENDE DE Z (Z = F(X,Y))

$$C(z) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}N(x,y) - \dfrac{\partial z}{\partial y}M(x,y)} = \mu(z) = e^{\int C(z)dz}$$

Imagen elaborada por el Prof. Lic.: Daniel González Núñez

Acá se les deja un par de videos que explican cómo realizar el proceso, en algunos de los casos supra mencionados:

Ejemplo 1:

https://www.youtube.com/watch?v=tQjvTyYbKH8&feature=youtu.be

Ejemplo 2:

https://www.youtube.com/watch?v=Ps1k68bjbTk&feature=youtu.be

Ecuaciones Lineales de Primer Orden Homogéneas y No Homogéneas

Empezamos el estudio de las ecuaciones lineales y lo hacemos con el caso más simple de todos; la ED Lineal de primer orden. En la siguiente imagen se ilustra las 2 formas en cómo se trabajará esta ecuación:

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

FORMAS DE LA ECUACIÓN:

$$\underbrace{a_1(x)\,y' + a_0(x) = h(x)}_{\text{Forma estándar}}$$

$$\underbrace{y' + p(x)\,y = q(x)}_{\text{Forma Normalizada}}$$

SOLUCIONES

$$y' + p(x)\,y = 0 \implies y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$y' + p(x)\,y = q(x) \implies y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx$$

Imagen realizada por el Prof. Lic. Daniel González Núñez

Ecuaciones Reducibles a Lineales: Ecuaciones de Bernoulli y Ecuaciones de Riccatti

Tras el estudio de la ecuación lineal, estamos en capacidad de analizar dos casos que corresponden a generalizaciones de la Ecuación Lineal de Primer Orden; se tratan de las ecuaciones de Bernoulli y de Riccatti.

Por medio de un cambio de variable, ambas ecuaciones se terminan convirtiendo en lineales de primer orden. Los cambios de variable se presentan a continuación:

ECUACIONES DE BERNOULLI Y RICCATTI

$$\underbrace{y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n}_{\text{Ecuación de Bernoulli } (n\neq 0 \text{ y } n\neq 1)} \quad \overset{\text{Se aplican los cambios}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} z = y^{1-n} \\ \underbrace{z' = (1-n)\,y^{-n}y'}_{\text{Despejar } y' \text{ en términos de } z} \end{cases}$$

$$\underbrace{y' + p(x)\,y + q(x)\,y^2 = r(x)}_{\text{Ecuación de Riccatti } (q(x)\neq 0 \text{ y } r(x)\neq 0)} \quad \overset{\text{Se aplican los cambios}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} y = \phi(x) + \dfrac{1}{z} \\ y' = \phi'(x) - \dfrac{z'}{z^2} \end{cases}$$

Imagen elaborada por el Prof. Lic.: Daniel González Núñez

Ecuaciones de Segundo Grado con Variable Ausente.

Si bien es cierto, este capítulo 1 del curso está centrado en ecuaciones de primer orden (posee sólo primera derivada de la función incógnita), con el fin de aplicar la teoría vista hasta ahora sobre las ED de primer orden, se va a analizar dos tipos de ecuaciones de segundo orden en las que, en ambos casos, una de las variables (x o y) no estará presente en dichas ED.

Trabajaremos estas ecuaciones, empleando los siguientes cambios de variable:

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN CON VARIABLE AUSENTE

$$\underbrace{F\left(y'',y',x\right)=0}_{y \text{ es la variable ausente}} \quad \xrightarrow{\text{Se aplican los cambios}} \quad \begin{cases} y'=v \\ y''=v' \end{cases}$$

$$\underbrace{F\left(y'',y',y\right)=0}_{x \text{ es la variable ausente}} \quad \xrightarrow{\text{Se aplican los cambios}} \quad \begin{cases} y'=v \\ y''=v'\cdot v\left(y\right) \end{cases}$$

Imagen elaborada por el Prof. Lic. Daniel González Núñez

En cualquier caso, la ecuación obtenida será una de primer orden de las ya estudiadas, las cuales ya sabemos resolver.

ASIGNACIONES

Para esta semana, se debe realizar la lectura y estudio de las páginas de la 16 a la 32 del Módulo de la Unidad.

Además, les planteamos las siguientes tareas:

1. Wiki colaborativa: Diagrama de Identificación de una ED de Primer Orden y Construcción de Procedimiento de Solución

Este es un trabajo colaborativo, el cual se realizará a través de los grupos que se indican en la siguiente tabla (se inserta tabla con la distribución de participante en una cantidad de grupos a determinar en su momento). El propósito de la misma es esquematizar lo comentado en el Foro #2, de manera que se elabore un material que resuma el proceso de identificación y resolución de una ED de primer orden. Las instrucciones a seguir son las siguientes:

- UNA VEZ QUE YA HAYAN PARTICIPADO EN EL FORO #2, se les habilitará la edición de la respectiva Wiki.
- Cuentan con un plazo de 4 días para terminar la Wiki. Es decir, la Wiki estará habilitada desde este momento y hasta última hora del día X.
- Una vez elaborado el producto, un integrante del grupo deberá escribirle por mensajería interna al docente para hacer saber que el docente puede revisarlo.
- Recuerde que, al igual que todas las demás actividades del curso que no tienen peso cuantitativo, ESTA ACTIVIDAD ES OBLIGATORIA Y DEBE SER APROBADA.
- Ante cualquier duda, pueden remitirse al foro de consultas respectivo, o bien, contactarme por mensajería interna.

Para la aprobación de la actividad, se consideran los siguientes criterios:

1. Participación activa de cada miembro.
2. Claridad, orden y coherencia del trabajo.
3. Entrega dentro del plazo estipulado.
4. Uso correcto de la ortografía y el lenguaje matemático.

2. Foro de construcción.

Foro #2: ¿Cómo determinar el tipo de ED de primer orden?

Bienvenidos nuevamente a un espacio conjunto de intercambio de saber.

Para esta oportunidad, se les abre este espacio con el fin de establecer entre todos, algo que les será de mucha utilidad práctica.

El estudio de los distintos tipos de ED de primer orden ha provisto de diversas formas de resolución de dichas ED. Esto implica saber, a priori, cómo reconocer una ED para luego poder escoger el método de solución apropiado. Es por eso que, se le plantea la interrogante:

¿Qué elementos o detalles en el planteamiento de una ecuación diferencial son los más importantes para identificar con facilidad el tipo de ED y consecuentemente, su método de solución?

Debe proporcionar una respuesta amplia, utilizando ejemplos concretos (pueden incluirse como archivos adjuntos o incrustados, usando las herramientas de la plataforma).

Además de la intervención propia, debe replicar al menos la intervención de 2 compañeros, en las que enriquezca o ponga en discusión lo planteado por ellos, proporcionando el debido sustento a sus aportes.

Se dispone de 4 días a partir del momento en que se habilita el foro, para realizar todas las participaciones solicitadas. El mismo se cerrará al 00:00 del día siguiente de la fecha límite y a partir de ese momento, no se recibirán más intervenciones, incluyendo aquellas que se hagan llegar por otros canales como la mensajería interna.

La aprobación de la actividad estará sujeta a los siguientes criterios:

- Cumplimiento del plazo de entrega y del número de intervenciones pedidas.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.

- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

No olviden ir trabajando en las listas de ejercicios que aparecen en las fuentes facilitadas:

a. Lista de ejercicios del Profesor Allan Lacy.

b. Lista de ejercicios del Profesor José Rosales-Ortega.

c. Libros de Kiseliov et. al. y Dennis Zill.

Los espero pronto en el foro y estaré al tanto de sus actividades… ¡Nos seguimos viendo virtualmente!

DANIEL

Clase 3: Algunas aplicaciones de las ED de primer orden a otras disciplinas.

¡Arrancamos la tercera y última semana en la cubriremos el primer capítulo de nuestro curso!

Y continuamos con contenidos que, de alguna manera ya hayan trabajado en curso propios de sus disciplinas o se les hagan familiares luego… Estudiaremos las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales vistas en las 2 semanas anteriores. ¡Comencemos!

Aplicaciones de las ED de primer orden

Las ecuaciones diferenciales tienen diversidad de aplicaciones en ramas como la física, la biología, termodinámica, etc. Vamos a ver una de serie de estas aplicaciones en las que las ecuaciones de primer tienen un papel preponderante en el estudio y modelado de varios fenómenos. Comenzamos con varios de ellos…

a. Ecuación Diferencial de una familia uniparamétrica de curvas.

Geométricamente hablando, una familia de curvas corresponde a un conjunto de curvas de satisfacen una determinada ecuación (algebraica) en cuya forma está presente un parámetro (constante numérica). Generalmente se representan por medio de una ecuación cuya estructura es:

$$\varphi(x, y, a) = 0$$

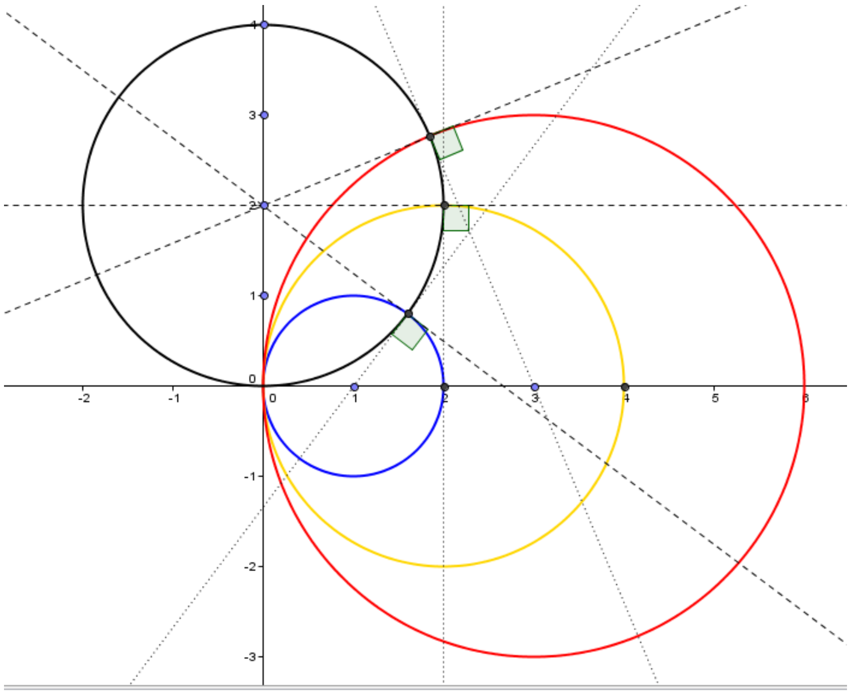
En la que x representa variable independiente, la variable dependiente es y, además de que a representa la constante arbitraria. Derivando a ambos lados y despejando la derivada (si el parámetro desaparece tras la derivación o bien, eliminando el parámetro al sustituir lo hallado en la ecuación original), se debe llegar a una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

Que corresponde a alguno de los tipos ya estudiados y que, por ende, se conoce su método de solución.

b. Trayectorias Ortogonales

Las trayectorias ortogonales de una familia de curvas corresponden a otra familia de curvas que cumplen una propiedad en particular; en los puntos de intersección entre curvas de las familias mencionadas, las tangentes a dichas curvas son ortogonales, como se aprecia en el gráfico siguiente:



Para calcular la ED de una familia de trayectorias ortogonales a otra familia dada, requerimos conocer de la ecuación algebraica que representa a la dada inicialmente y aplicar el proceso previamente visto de hallar la ED:

$$y' = f(x, y)$$

Luego esta ED se transforma a:

$$y' = \frac{-1}{f(x, y)}$$

La cual corresponde a la ED de las trayectorias ortogonales y, por ende, es la que resolvemos para encontrar a familia buscada.

c. Crecimiento poblacional

El estudio de las poblaciones mediante una ecuación de primer orden se limitará al estudio de poblaciones aisladas y sin migración. Para ello, se establece una ED a partir de la Ley de Malthus, la cual indica que el crecimiento de una población (respecto al tiempo) con las características anteriores, se da con una tasa proporcional a la cantidad presente, donde la constante de proporcionalidad está dada por la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad. Es decir, el modelo está dado por:

$$y' = ky$$

Condicionado a una población inicial:

$$y(0) = y_0$$

Y a la condición

$$y(t_0) = P$$

Que refleja la cantidad de población después de un determinado tiempo t_0.
La solución general de la ED planteada antes es:

$$y(t) = Ce^{kt}$$

La cual se particulariza tras la aplicación de las 2 condiciones anteriores.

d. Mezclas Químicas

Un problema de estudio sobre mezclas químicas es aquel modela la cantidad de una sustancia (usualmente se trabaja con sal, disuelta en líquido, generalmente agua) presente en un tanque u otro dispositivo de almacenamiento, en el cual hay tanto un ducto de entrada como otro de salida, en el que entra y sale, respectivamente, cantidades de la sustancia en estudio. En este caso, se plantea el modelo:

$$x'(t) = cantidad\ de\ sal\ entrante - cantidad\ de\ sal\ saliente$$

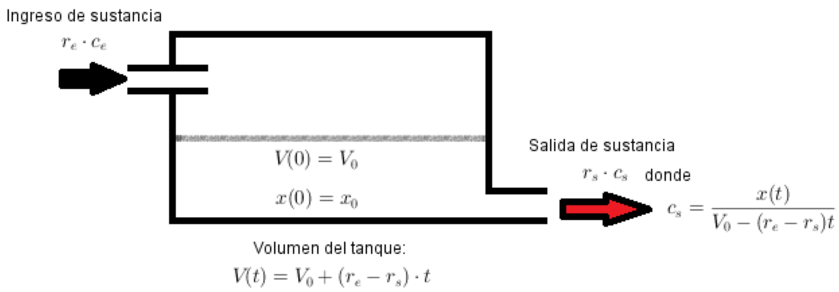
Que permite llegar a la siguiente ecuación de primer orden, no homogénea:

$$x'(t) + \frac{r_s x(t)}{V_0 + (r_e - r_s)t} = r_e c_e$$

Donde:

$$r_e = rapidez\ de\ entrada\ de\ la\ sustancia$$
$$c_e = concentración\ de\ entrada\ de\ la\ sustancia$$
$$r_s = rapidez\ de\ salida\ de\ la\ sustancia$$
$$V_0 = volumen\ inicial\ de\ líquido\ en\ el\ tanque$$

Gráficamente, se puede visualizar el modelo de la siguiente forma:



Dependiendo de las diferencias entre las rapideces de entrada y salida de líquido, tendremos vaciamiento, desbordamiento o mantenimiento de nivel de volumen en el tanque.

e. Ley de Enfriamiento de Newton

La Ley de enfriamiento de Newton se establece de manera muy sencilla:
"En un medio con temperatura constante, donde se introduce un objeto con una determinada temperatura inicial, la variación de la temperatura (respecto al tiempo) de dicho objeto será proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la del medio en que se encuentra éste".
Lo anterior, permite la formulación de la siguiente ecuación diferencial (en variables separables)

$$T'(t) = k(T - T_m)$$

Donde

$$T_m = Temperatura\,del\,medio$$

La anterior ecuación tiene como solución general a:

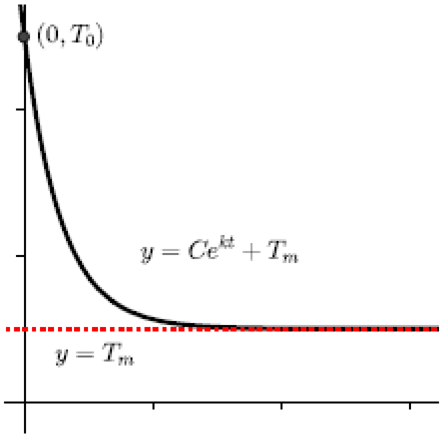
$$T(t) = Ce^{kt} + T_m$$

Y está sujeta a las siguientes dos condiciones:

$$T(0) = T_0$$

$$T(t_1) = T_1$$

Lo cual conduce a una solución particular que puede simplificarse aplicando propiedades de potencias y logaritmos. Gráficamente, se puede apreciar así:



Lo cual indica que, transcurrido mucho tiempo después de que el objeto es introducido al medio, su temperatura será cada vez más próxima a la de éste.

Teorema de Existencia y Unicidad de la solución de una ED de primer orden.
Para cerrar esta tercera case, presentaremos un teorema que justifica lo realizado en varios problemas de este primer capítulo; la existencia de la solución particular de una ED de primer orden:

$$y' = f(x, y)$$

Dada una determinada condición inicial:

$$y(x_0) = y_0$$

Lo anterior, en el caso del cumplimiento de las siguientes condiciones:

$$f(x,y)\ es\ continua\ en\ una\ región\ D\ del\ plano\ xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ es\ continua\ en\ una\ región\ D\ del\ plano\ xy$$

Implica que la solución particular hallada es única y de ahí que, gráficamente, sólo una curva (que representa una función solución de la ED) contenga al punto (x_0,y_0).

Para recapitular un poco cada una de estas aplicaciones, les sugerimos observar la siguiente presentación:

http://prezi.com/jfxjza2tf_xf/?utm_campaign=share&utm_medium=copy

Así como el siguiente video, con algunos ejemplos ilustrativos de algunas de ellas:

https://www.youtube.com/watch?v=hDpwIRFLEFg&rel=0

ASIGNACIONES

Las actividades de esta semana son las siguientes:

1. Prueba Corta #1

Bienvenidos a esta primera prueba corta, en la que se pretende medir todo lo visto en este primer capítulo del curso; el manejo de los conceptos tratados y la adquisición de distintas habilidades y destrezas para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden.

Deben seguirse las siguientes instrucciones:

- Se presentan 5 ejercicios al azar que deben responderse en un máximo de 2 intentos, para lo cual se cuenta con una hora de tiempo a partir del momento en que se inicia un intento. Procure evitar una inactividad mayor a 5 minutos, ya que ello provocará que se cierre la sesión y termine el intento, independientemente del desarrollo logrado hasta ese momento.

- La actividad no tiene peso cuantitativo en la nota final del curso, sin embargo, DEBE SER APROBADA Y REALIZADA DE FORMA OBLIGATORIA. Para efectos de aprobación de la actividad, tenga en cuenta que se tomará la mayor nota obtenida en los 2 intentos.

- Asegúrese de haber contestado cada uno de los ítems. Una vez hecho esto, dar click en el botón “Enviar todo y terminar” para comprobar sus respuestas y obtener su nota.

- La prueba estará disponible durante 7 días desde el momento de la publicación de la Clase 3.

2. Foro de construcción.

El foro para esta clase se detalla a continuación:

Foro #3: Interpretando gráficamente el Teorema de Existencia y Unicidad.

El Teorema de Existencia y Unicidad nos indica las condiciones necesarias para poder garantizar que un problema de valor inicial, conformado por una ecuación diferencial de primer orden y un valor particular de la función solución, tenga una única solución en una determinada región del plano xy. A partir de esto:

¿Cómo se interpreta gráficamente el Teorema de Existencia y Unicidad, aplicado a un ejemplo en concreto?

Debe proporcionar una respuesta amplia, utilizando ejemplos concretos (pueden incluirse como archivos adjuntos o incrustados, usando las herramientas de la plataforma).

Además de la intervención propia, debe replicar al menos la intervención de 2 compañeros, en las que enriquezca o ponga en discusión lo planteado por ellos, proporcionando el debido sustento a sus aportes.

Se dispone de una semana (7 días) a partir del momento en que se habilita el foro, para realizar todas las participaciones solicitadas. El mismo se cerrará al 00:00 del día siguiente de la fecha límite y a partir de ese momento, no se recibirán más intervenciones, incluyendo aquellas que se hagan llegar por otros canales como la mensajería interna.

La aprobación de la actividad estará sujeta a los siguientes criterios:

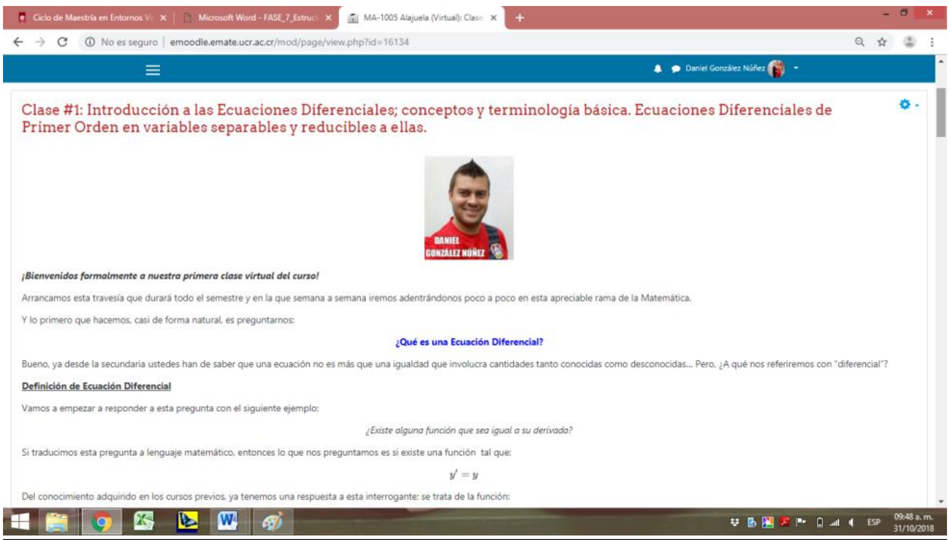
- Cumplimiento del plazo de entrega y del número de intervenciones pedidas.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

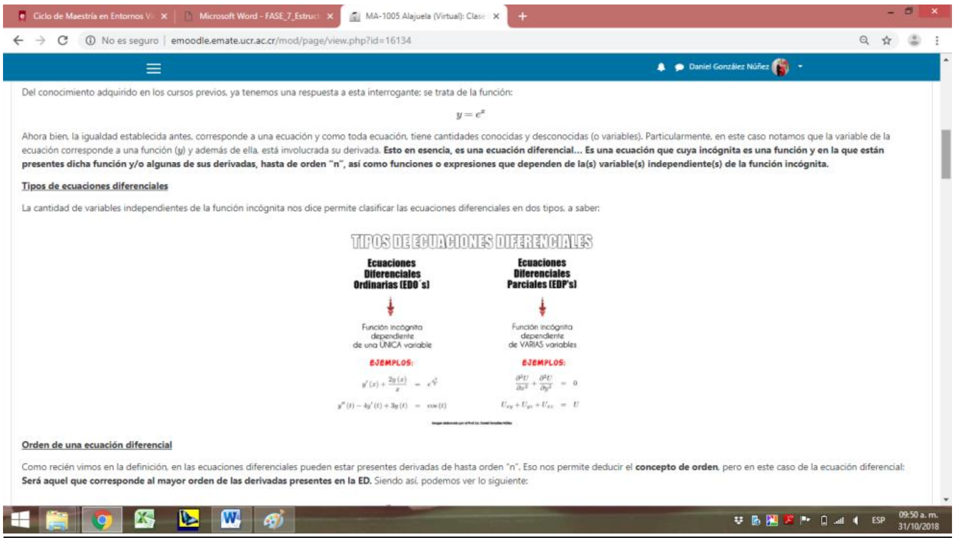
¡No queda más que invitarlos a trabajar desde ya! ¡No se queden atrás!

DANIEL

5. Captura de pantalla de las clases

Clase 1:





Del conocimiento adquirido en los cursos previos, ya tenemos una respuesta a esta interrogante: se trata de la función:

$$y = e^x$$

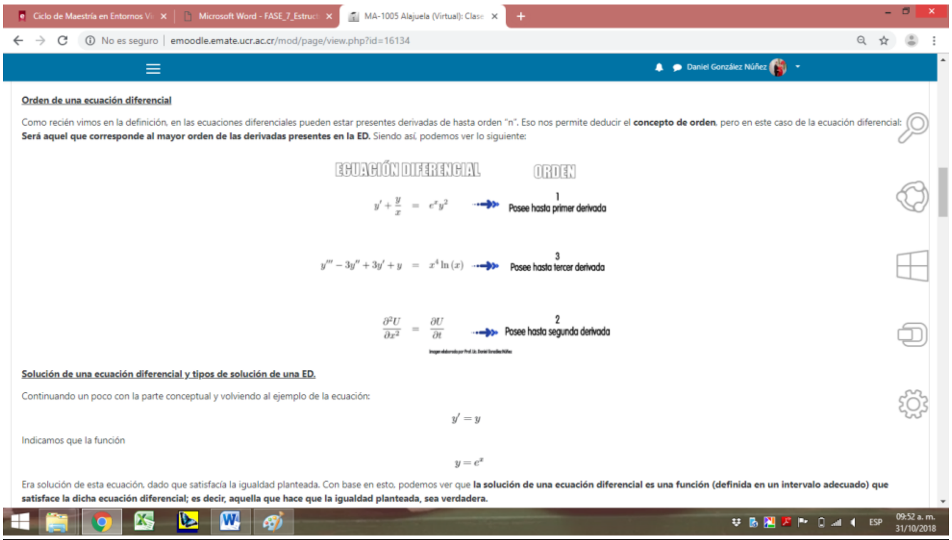
Ahora bien, la igualdad establecida antes, corresponde a una ecuación y como toda ecuación, tiene cantidades conocidas y desconocidas (o variables). Particularmente, en este caso notamos que la variable de la ecuación corresponde a una función (y) y además de ella, está involucrada su derivada. **Esto en esencia, es una ecuación diferencial… Es una ecuación que cuya incógnita es una función y en la que están presentes dicha función y/o algunas de sus derivadas, hasta de orden "n", así como funciones o expresiones que dependen de la(s) variable(s) independiente(s) de la función incógnita.**

Tipos de ecuaciones diferenciales

La cantidad de variables independientes de la función incógnita nos dice permite clasificar las ecuaciones diferenciales en dos tipos, a saber:

Orden de una ecuación diferencial

Como recién vimos en la definición, en las ecuaciones diferenciales pueden estar presentes derivadas de hasta orden "n". Eso nos permite deducir el **concepto de orden**, pero en este caso de la ecuación diferencial: **Será aquel que corresponde al mayor orden de las derivadas presentes en la ED.** Siendo así, podemos ver lo siguiente:



Orden de una ecuación diferencial

Como recién vimos en la definición, en las ecuaciones diferenciales pueden estar presentes derivadas de hasta orden "n". Eso nos permite deducir el **concepto de orden**, pero en este caso de la ecuación diferencial: **Será aquel que corresponde al mayor orden de las derivadas presentes en la ED.** Siendo así, podemos ver lo siguiente:

Solución de una ecuación diferencial y tipos de solución de una ED.

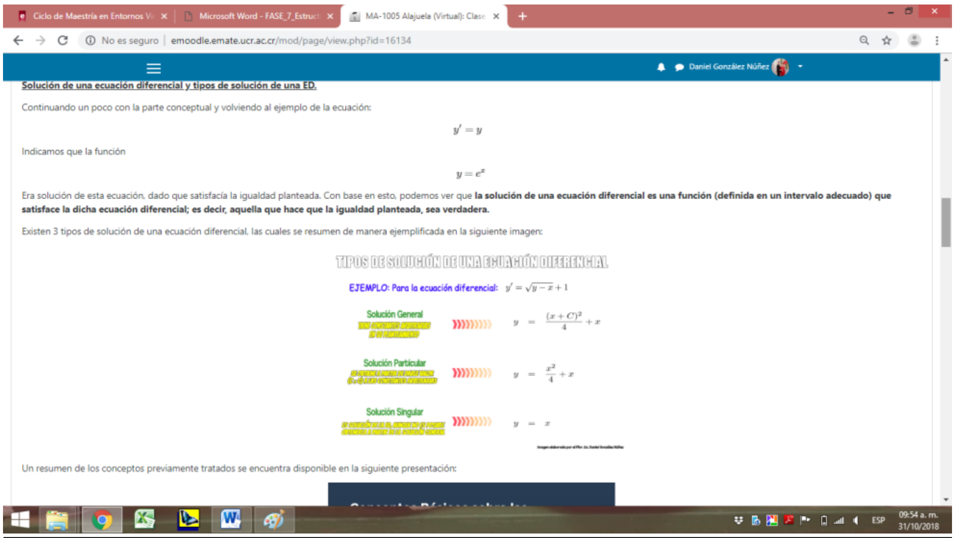
Continuando un poco con la parte conceptual y volviendo al ejemplo de la ecuación:

$$y' = y$$

Indicamos que la función

$$y = e^x$$

Era solución de esta ecuación, dado que satisfacía la igualdad planteada. Con base en esto, podemos ver que **la solución de una ecuación diferencial es una función (definida en un intervalo adecuado) que satisface la dicha ecuación diferencial; es decir, aquella que hace que la igualdad planteada, sea verdadera.**



Solución de una ecuación diferencial y tipos de solución de una ED.

Continuando un poco con la parte conceptual y volviendo al ejemplo de la ecuación:

$$y' = y$$

Indicamos que la función

$$y = e^x$$

Era solución de esta ecuación, dado que satisfacía la igualdad planteada. Con base en esto, podemos ver que **la solución de una ecuación diferencial es una función (definida en un intervalo adecuado) que satisface la dicha ecuación diferencial; es decir, aquella que hace que la igualdad planteada, sea verdadera.**

Existen 3 tipos de solución de una ecuación diferencial, las cuales se resumen de manera ejemplificada en la siguiente imagen:

Un resumen de los conceptos previamente tratados se encuentra disponible en la siguiente presentación:

Un resumen de los conceptos previamente tratados se encuentra disponible en la siguiente presentación:

Conceptos Básicos sobre las Ecuaciones Diferenciales Por Daniel González Núñez

Presentar

Nos adentramos ahora en el estudio de casos particulares de ecuaciones diferenciales y sus métodos de solución. Comenzamos dicho estudio con ecuaciones de primer orden, las cuales están conformadas por la primera derivada de la función incógnita (sí o sí debe aparecer en la ED), así como por la función incógnita y expresiones que dependan de ella y de la variable independiente (no es estricto que aparezcan en la ED).

El primer tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden que veremos, son unas que poseen un método de solución particularmente muy sencillo: **Las ecuaciones en variables separables.**

¿Pero qué quiere decir la frase "variables separables"? Ya sabemos que nuestra ecuación tiene una incógnita que corresponde a una función (que a su vez es variable dependiente de otra variable, llamada independiente (generalmente se usa "x" o "t"). Entonces, suponiendo que nuestra función incógnita es:

$$y = y(x)$$

Lo que procede es a aplicar una serie de propiedades y procedimientos que nos permitan agrupar términos correspondientes a cada variable de un solo lado de la ecuación diferencial, partiendo del hecho que:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

Nuestro propósito es, en buena teoría, poder despejar la variable dependiente en términos de la independiente. Para ello, note que debemos "deshacernos" de los diferenciales... ¿Y cómo lo hacemos? Bueno, recordemos que los diferenciales guardan alguna familiaridad (¡aunque no son lo mismo!) y que un proceso "inverso" a ellos, es la **integración.** Es por ello que, debemos realizar esta operación a ambos lados de la igualdad anterior, para luego poder efectuar, en los casos que sea posible, el despeje de nuestra incógnita (existirán casos donde despejar la incógnita sea muy difícil, engorroso y hasta imposible, por lo que se aconseja dejar la solución de forma implícita).

Veamos el siguiente video ilustrativo con un par de ejemplos muy simples de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver mediante variables separables:

Ejemplo 2: Halle la solución general de la ecuación diferencial:

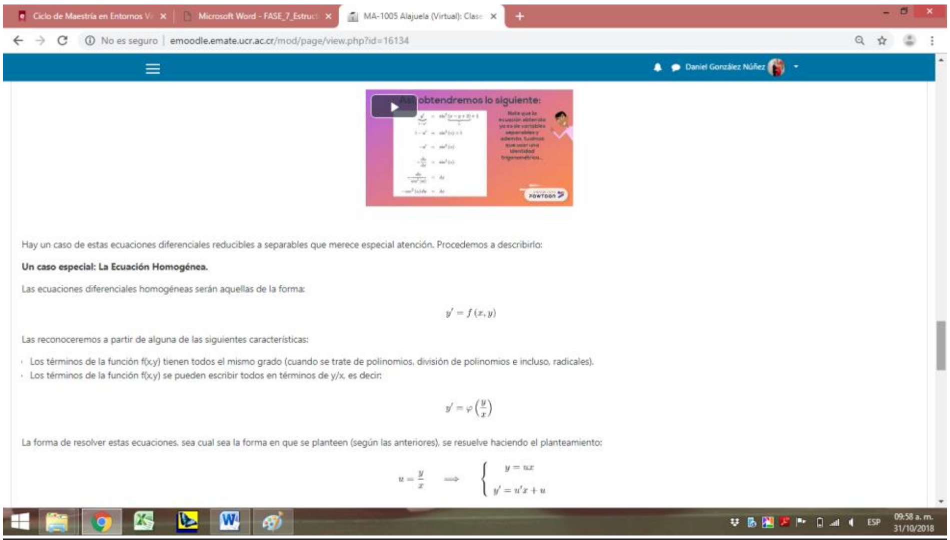
$$y' = 2\sqrt{y}$$

Ecuaciones reducibles a separables mediante cambios de variable.

No podemos esperar que todas las ecuaciones diferenciales de primer orden puedan ser resueltas mediante variables separables... Sin embargo, existen casos donde es posible realizar cambios de variables (sustituciones de la variable dependiente y de su derivada) que permiten obtener ecuaciones diferenciales cuya forma si es compatible con la separación de variables.

Un claro ejemplo de ello se puede apreciar por medio del siguiente video:

Así obtendremos lo siguiente:



Así obtendremos lo siguiente:

Hay un caso de estas ecuaciones diferenciales reducibles a separables que merece especial atención. Procedemos a describirlo:

Un caso especial: La Ecuación Homogénea.

Las ecuaciones diferenciales homogéneas serán aquellas de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

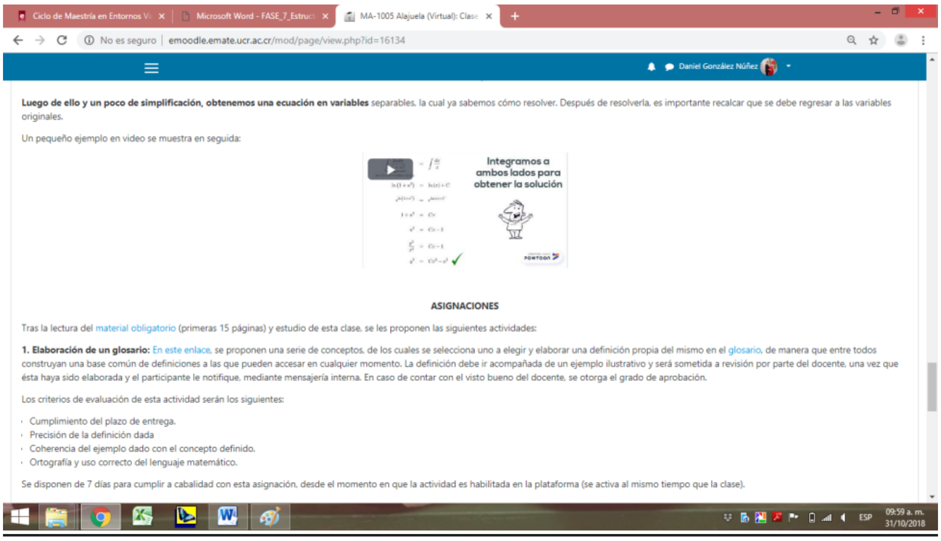
Las reconoceremos a partir de alguna de las siguientes características:

- Los términos de la función f(x,y) tienen todos el mismo grado (cuando se trate de polinomios, división de polinomios e incluso, radicales).
- Los términos de la función f(x,y) se pueden escribir todos en términos de y/x, es decir:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

La forma de resolver estas ecuaciones, sea cual sea la forma en que se planteen (según las anteriores), se resuelve haciendo el planteamiento:

$$u = \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y = ux \\ y' = u'x + u \end{cases}$$



Luego de ello y un poco de simplificación, obtenemos una ecuación en variables separables, la cual ya sabemos cómo resolver. Después de resolverla, es importante recalcar que se debe regresar a las variables originales.

Un pequeño ejemplo en video se muestra en seguida:

ASIGNACIONES

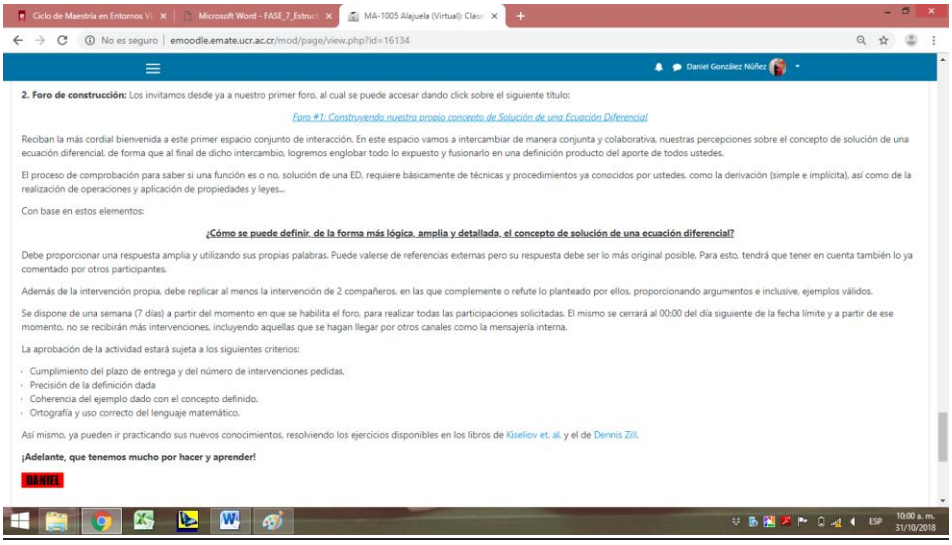
Tras la lectura del material obligatorio (primeras 15 páginas) y estudio de esta clase, se les proponen las siguientes actividades:

1. Elaboración de un glosario: En este enlace, se proponen una serie de conceptos, de los cuales se selecciona uno a elegir y elaborar una definición propia del mismo en el glosario, de manera que entre todos construyan una base común de definiciones a las que pueden accesar en cualquier momento. La definición debe ir acompañada de un ejemplo ilustrativo y será sometida a revisión por parte del docente, una vez que ésta haya sido elaborada y el participante le notifique, mediante mensajería interna. En caso de contar con el visto bueno del docente, se otorga el grado de aprobación.

Los criterios de evaluación de esta actividad serán los siguientes:

- Cumplimiento del plazo de entrega.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

Se disponen de 7 días para cumplir a cabalidad con esta asignación, desde el momento en que la actividad es habilitada en la plataforma (se activa al mismo tiempo que la clase).



2. Foro de construcción: Los invitamos desde ya a nuestro primer foro, al cual se puede accesar dando click sobre el siguiente título:

Foro #1: Construyendo nuestro propio concepto de Solución de una Ecuación Diferencial

Reciban la más cordial bienvenida a este primer espacio conjunto de interacción. En este espacio vamos a intercambiar de manera conjunta y colaborativa, nuestras percepciones sobre el concepto de solución de una ecuación diferencial, de forma que al final de dicho intercambio, logremos englobar todo lo expuesto y fusionarlo en una definición producto del aporte de todos ustedes.

El proceso de comprobación para saber si una función es o no, solución de una ED, requiere básicamente de técnicas y procedimientos ya conocidos por ustedes, como la derivación (simple e implícita), así como de la realización de operaciones y aplicación de propiedades y leyes...

Con base en estos elementos:

¿Cómo se puede definir, de la forma más lógica, amplia y detallada, el concepto de solución de una ecuación diferencial?

Debe proporcionar una respuesta amplia y utilizando sus propias palabras. Puede valerse de referencias externas pero su respuesta debe ser lo más original posible. Para esto, tendrá que tener en cuenta también lo ya comentado por otros participantes.

Además de la intervención propia, debe replicar al menos la intervención de 2 compañeros, en las que complemente o refute lo planteado por ellos, proporcionando argumentos e inclusive, ejemplos válidos.

Se dispone de una semana (7 días) a partir del momento en que se habilita el foro, para realizar todas las participaciones solicitadas. El mismo se cerrará al 00:00 del día siguiente de la fecha límite y a partir de ese momento, no se recibirán más intervenciones, incluyendo aquellas que se hagan llegar por otros canales como la mensajería interna.

La aprobación de la actividad estará sujeta a los siguientes criterios:

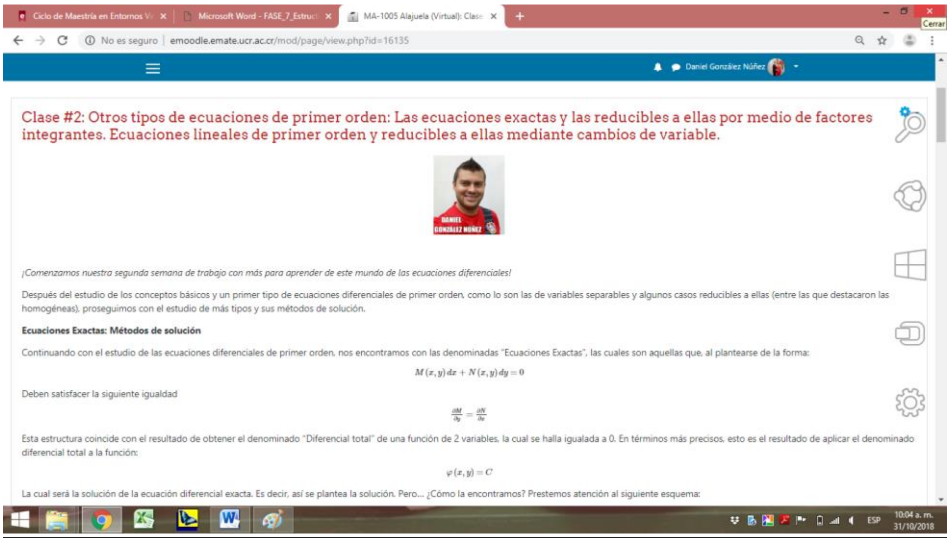
- Cumplimiento del plazo de entrega y del número de intervenciones pedidas.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

Así mismo, ya pueden ir practicando sus nuevos conocimientos, resolviendo los ejercicios disponibles en los libros de Kiseliov et. al. y el de Dennis Zill.

¡Adelante, que tenemos mucho por hacer y aprender!

DANIEL

Clase #2:



Clase #2: Otros tipos de ecuaciones de primer orden: Las ecuaciones exactas y las reducibles a ellas por medio de factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden y reducibles a ellas mediante cambios de variable.

¡Comenzamos nuestra segunda semana de trabajo con más para aprender de este mundo de las ecuaciones diferenciales!

Después del estudio de los conceptos básicos y un primer tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden, como lo son las de variables separables y algunos casos reducibles a ellas (entre las que destacaron las homogéneas), proseguimos con el estudio de más tipos y sus métodos de solución.

Ecuaciones Exactas: Métodos de solución

Continuando con el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, nos encontramos con las denominadas "Ecuaciones Exactas", las cuales son aquellas que, al plantearse de la forma:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

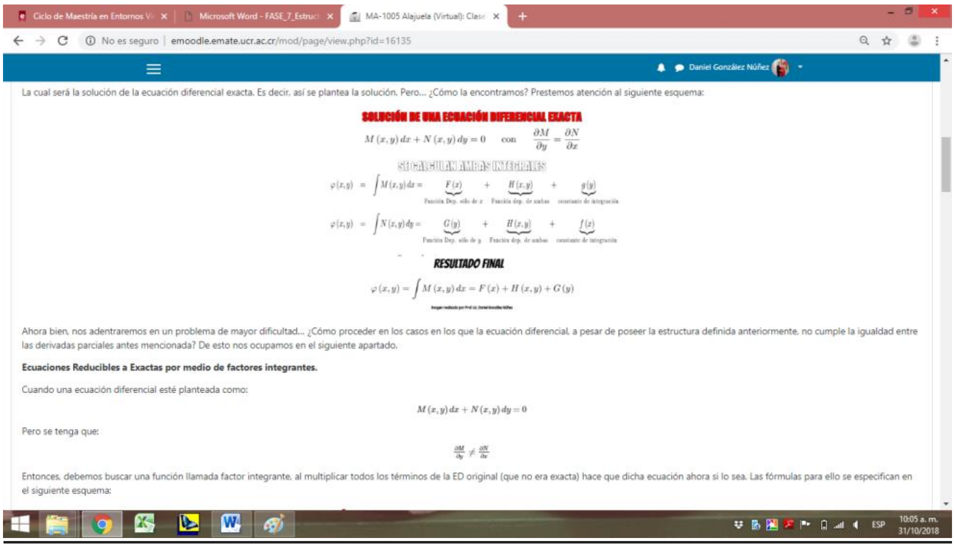
Deben satisfacer la siguiente igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Esta estructura coincide con el resultado de obtener el denominado "Diferencial total" de una función de 2 variables, la cual se halla igualada a 0. En términos más precisos, esto es el resultado de aplicar el denominado diferencial total a la función:

$$\varphi(x,y) = C$$

La cual será la solución de la ecuación diferencial exacta. Es decir, así se plantea la solución. Pero... ¿Cómo la encontramos? Prestemos atención al siguiente esquema:



La cual será la solución de la ecuación diferencial exacta. Es decir, así se plantea la solución. Pero... ¿Cómo la encontramos? Prestemos atención al siguiente esquema:

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{con} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

SE CALCULAN AMBAS INTEGRALES

$$\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \underbrace{F(x)}_{\text{Función Dep. sólo de } x} + \underbrace{H(x,y)}_{\text{Función dep. de ambas}} + \underbrace{g(y)}_{\text{constante de integración}}$$

$$\varphi(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \underbrace{G(y)}_{\text{Función Dep. sólo de } y} + \underbrace{H(x,y)}_{\text{Función dep. de ambas}} + \underbrace{f(x)}_{\text{constante de integración}}$$

RESULTADO FINAL

$$\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,dx = F(x) + H(x,y) + G(y)$$

Ahora bien, nos adentraremos en un problema de mayor dificultad... ¿Cómo proceder en los casos en los que la ecuación diferencial, a pesar de poseer la estructura definida anteriormente, no cumple la igualdad entre las derivadas parciales antes mencionada? De esto nos ocupamos en el siguiente apartado.

Ecuaciones Reducibles a Exactas por medio de factores integrantes.

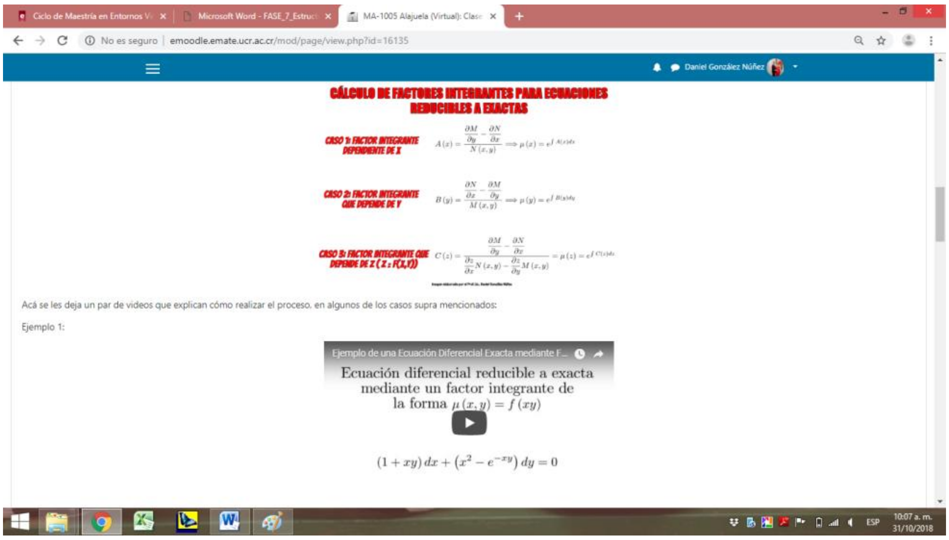
Cuando una ecuación diferencial esté planteada como:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Pero se tenga que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces, debemos buscar una función llamada factor integrante, al multiplicar todos los términos de la ED original (que no era exacta) hace que dicha ecuación ahora si lo sea. Las fórmulas para ello se especifican en el siguiente esquema:



CÁLCULO DE FACTORES INTEGRANTES PARA ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS

CASO 1: FACTOR INTEGRANTE DEPENDIENTE DE X $\quad A(x) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int A(x)dx}$

CASO 2: FACTOR INTEGRANTE QUE DEPENDE DE Y $\quad B(y) = \dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)} \Longrightarrow \mu(y) = e^{\int B(y)dy}$

CASO 3: FACTOR INTEGRANTE QUE DEPENDE DE Z (Z = F(X,Y)) $\quad C(z) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial z}{\partial y}M(x,y)} = \mu(z) = e^{\int C(z)dz}$

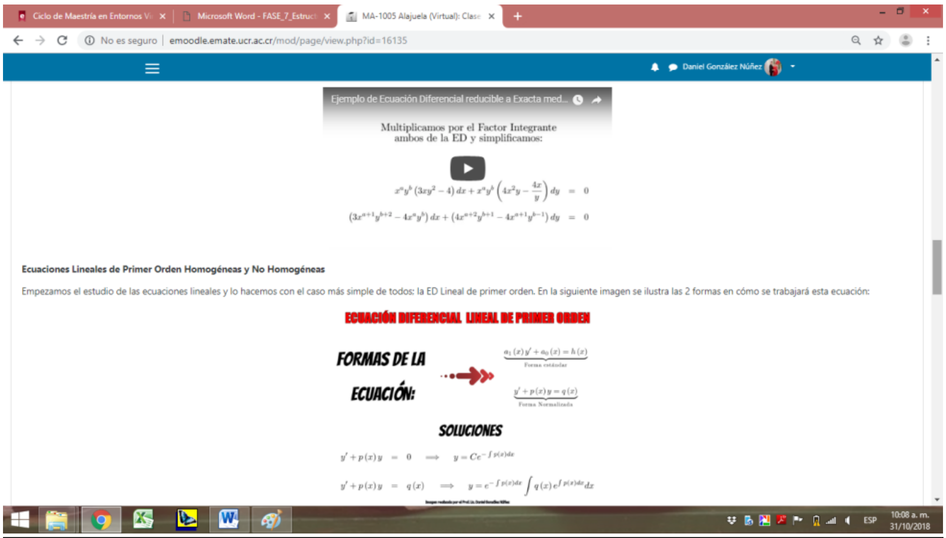
Acá se les deja un par de videos que explican cómo realizar el proceso, en algunos de los casos supra mencionados:

Ejemplo 1:

Ejemplo de una Ecuación Diferencial Exacta mediante F...

Ecuación diferencial reducible a exacta mediante un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = f(xy)$

$$(1+xy)\,dx + \left(x^2 - e^{-xy}\right)dy = 0$$



Ejemplo de Ecuación Diferencial reducible a Exacta med...

Multiplicamos por el Factor Integrante ambos de la ED y simplificamos:

$$x^a y^b \left(3xy^2 - 4\right)dx + x^a y^b \left(4x^2 y - \frac{4x}{y}\right)dy = 0$$

$$\left(3x^{a+1}y^{b+2} - 4x^a y^b\right)dx + \left(4x^{a+2}y^{b+1} - 4x^{a+1}y^{b-1}\right)dy = 0$$

Ecuaciones Lineales de Primer Orden Homogéneas y No Homogéneas

Empezamos el estudio de las ecuaciones lineales y lo hacemos con el caso más simple de todos: la ED Lineal de primer orden. En la siguiente imagen se ilustra las 2 formas en cómo se trabajará esta ecuación:

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

FORMAS DE LA ECUACIÓN:

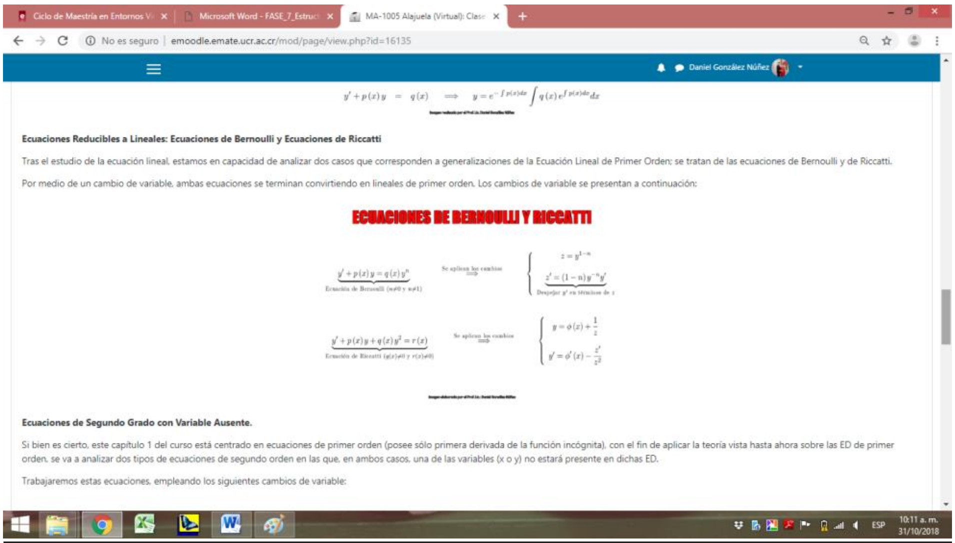
$$\underbrace{a_1(x)y' + a_0(x) = h(x)}_{\text{Forma estándar}}$$

$$\underbrace{y' + p(x)y = q(x)}_{\text{Forma Normalizada}}$$

SOLUCIONES

$$y' + p(x)y = 0 \Longrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$y' + p(x)y = q(x) \Longrightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$



$$y' + p(x)y = q(x) \implies y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Ecuaciones Reducibles a Lineales: Ecuaciones de Bernoulli y Ecuaciones de Riccatti

Tras el estudio de la ecuación lineal, estamos en capacidad de analizar dos casos que corresponden a generalizaciones de la Ecuación Lineal de Primer Orden; se tratan de las ecuaciones de Bernoulli y de Riccatti.

Por medio de un cambio de variable, ambas ecuaciones se terminan convirtiendo en lineales de primer orden. Los cambios de variable se presentan a continuación:

ECUACIONES DE BERNOULLI Y RICCATTI

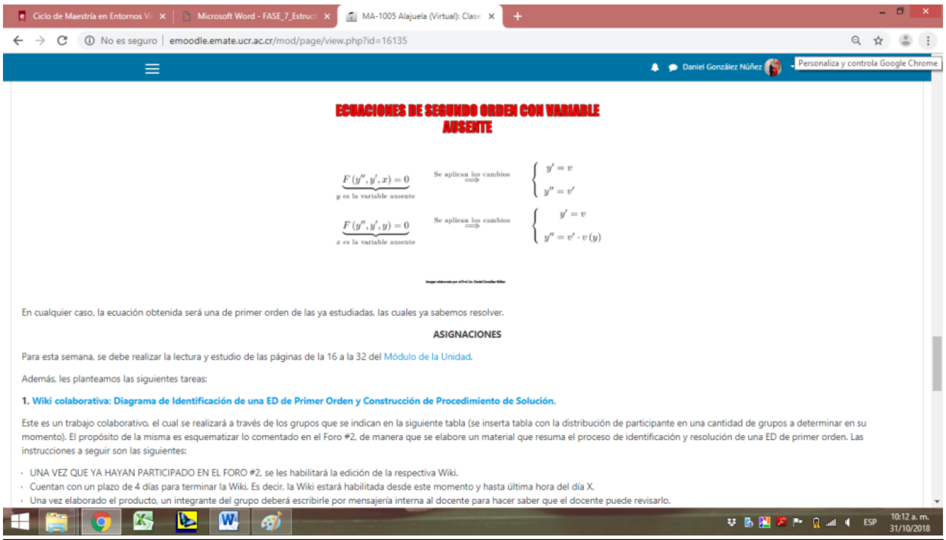
$$\underbrace{y' + p(x)y = q(x)y^n}_{\text{Ecuación de Bernoulli } (n\neq 0 \text{ y } n\neq 1)} \xrightarrow{\text{Se aplican los cambios}} \begin{cases} z = y^{1-n} \\ \underbrace{z' = (1-n)y^{-n}y'}_{\text{Despejar } y' \text{ en términos de } z} \end{cases}$$

$$\underbrace{y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)}_{\text{Ecuación de Riccatti } (q(x)\neq 0 \text{ y } r(x)\neq 0)} \xrightarrow{\text{Se aplican los cambios}} \begin{cases} y = \phi(x) + \frac{1}{z} \\ y' = \phi'(x) - \frac{z'}{z^2} \end{cases}$$

Ecuaciones de Segundo Grado con Variable Ausente.

Si bien es cierto, este capítulo 1 del curso está centrado en ecuaciones de primer orden (posee sólo primera derivada de la función incógnita), con el fin de aplicar la teoría vista hasta ahora sobre las ED de primer orden, se va a analizar dos tipos de ecuaciones de segundo orden en las que, en ambos casos, una de las variables (x o y) no estará presente en dichas ED.

Trabajaremos estas ecuaciones, empleando los siguientes cambios de variable:



ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN CON VARIABLE AUSENTE

$$\underbrace{F(y'', y', x) = 0}_{y \text{ es la variable ausente}} \xrightarrow{\text{Se aplican los cambios}} \begin{cases} y' = v \\ y'' = v' \end{cases}$$

$$\underbrace{F(y'', y', y) = 0}_{x \text{ es la variable ausente}} \xrightarrow{\text{Se aplican los cambios}} \begin{cases} y' = v \\ y'' = v' \cdot v(y) \end{cases}$$

En cualquier caso, la ecuación obtenida será una de primer orden de las ya estudiadas, las cuales ya sabemos resolver.

ASIGNACIONES

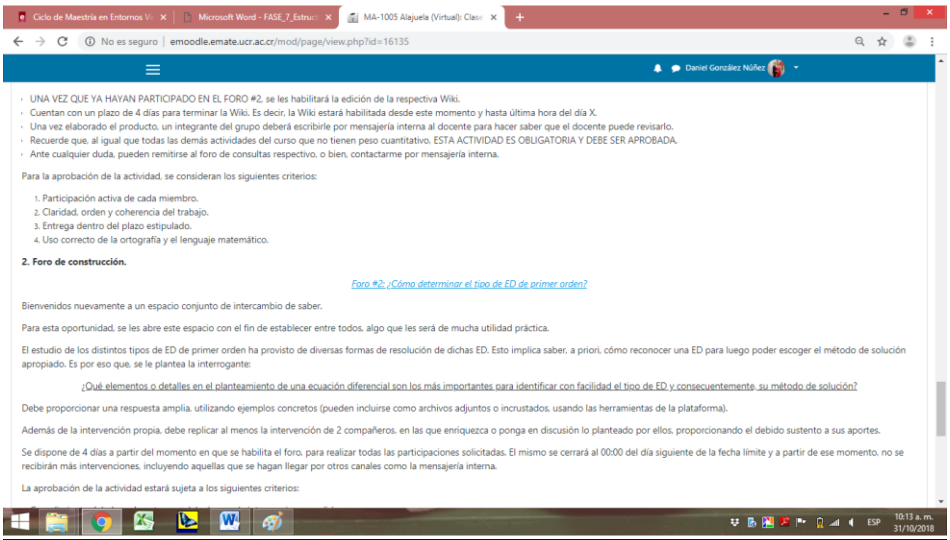
Para esta semana, se debe realizar la lectura y estudio de las páginas de la 16 a la 32 del Módulo de la Unidad.

Además, les planteamos las siguientes tareas:

1. Wiki colaborativa: Diagrama de Identificación de una ED de Primer Orden y Construcción de Procedimiento de Solución.

Este es un trabajo colaborativo, el cual se realizará a través de los grupos que se indican en la siguiente tabla (se inserta tabla con la distribución de participante en una cantidad de grupos a determinar en su momento). El propósito de la misma es esquematizar lo comentado en el Foro #2, de manera que se elabore un material que resuma el proceso de identificación y resolución de una ED de primer orden. Las instrucciones a seguir son las siguientes:

- UNA VEZ QUE YA HAYAN PARTICIPADO EN EL FORO #2, se les habilitará la edición de la respectiva Wiki.
- Cuentan con un plazo de 4 días para terminar la Wiki. Es decir, la Wiki estará habilitada desde este momento y hasta última hora del día X.
- Una vez elaborado el producto, un integrante del grupo deberá escribirle por mensajería interna al docente para hacer saber que el docente puede revisarlo.



- UNA VEZ QUE YA HAYAN PARTICIPADO EN EL FORO #2, se les habilitará la edición de la respectiva Wiki.
- Cuentan con un plazo de 4 días para terminar la Wiki. Es decir, la Wiki estará habilitada desde este momento y hasta última hora del día X.
- Una vez elaborado el producto, un integrante del grupo deberá escribirle por mensajería interna al docente para hacer saber que el docente puede revisarlo.

- Recuerde que, al igual que todas las demás actividades del curso que no tienen peso cuantitativo, ESTA ACTIVIDAD ES OBLIGATORIA Y DEBE SER APROBADA.
- Ante cualquier duda, pueden remitirse al foro de consultas respectivo, o bien, contactarme por mensajería interna.

Para la aprobación de la actividad, se consideran los siguientes criterios:

1. Participación activa de cada miembro.
2. Claridad, orden y coherencia del trabajo.
3. Entrega dentro del plazo estipulado.
4. Uso correcto de la ortografía y el lenguaje matemático.

2. Foro de construcción.

Foro #2: ¿Cómo determinar el tipo de ED de primer orden?

Bienvenidos nuevamente a un espacio conjunto de intercambio de saber.

Para esta oportunidad, se les abre este espacio con el fin de establecer entre todos, algo que les será de mucha utilidad práctica.

El estudio de los distintos tipos de ED de primer orden ha provisto de diversas formas de resolución de dichas ED. Esto implica saber, a priori, cómo reconocer una ED para luego poder escoger el método de solución apropiado. Es por eso que, se le plantea la interrogante:

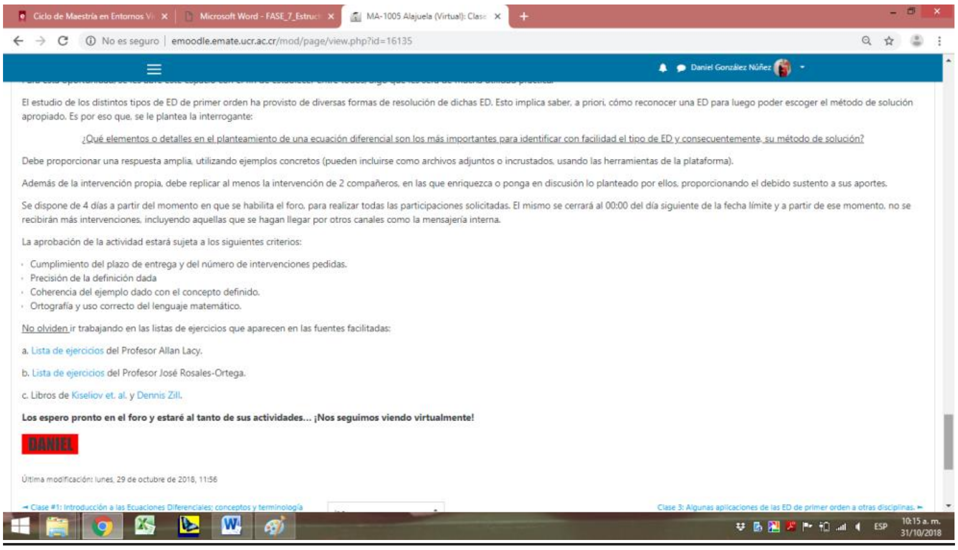
¿Qué elementos o detalles en el planteamiento de una ecuación diferencial son los más importantes para identificar con facilidad el tipo de ED y consecuentemente, su método de solución?

Debe proporcionar una respuesta amplia, utilizando ejemplos concretos (pueden incluirse como archivos adjuntos o incrustados, usando las herramientas de la plataforma).

Además de la intervención propia, debe replicar al menos la intervención de 2 compañeros, en las que enriquezca o ponga en discusión lo planteado por ellos, proporcionando el debido sustento a sus aportes.

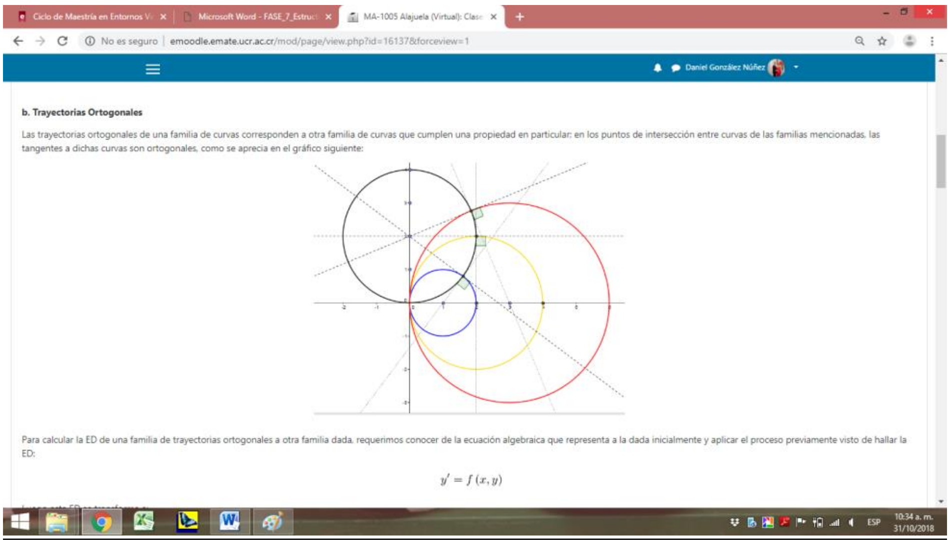
Se dispone de 4 días a partir del momento en que se habilita el foro, para realizar todas las participaciones solicitadas. El mismo se cerrará al 00:00 del día siguiente de la fecha límite y a partir de ese momento, no se recibirán más intervenciones, incluyendo aquellas que se hagan llegar por otros canales como la mensajería interna.

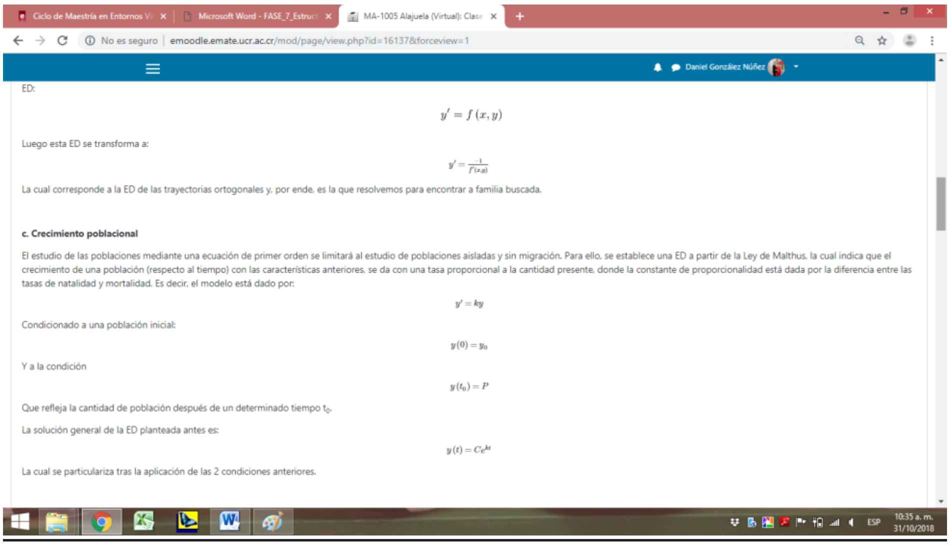
La aprobación de la actividad estará sujeta a los siguientes criterios:


El estudio de los distintos tipos de ED de primer orden ha provisto de diversas formas de resolución de dichas ED. Esto implica saber, a priori, cómo reconocer una ED para luego poder escoger el método de solución apropiado. Es por eso que, se le plantea la interrogante:
¿Qué elementos o detalles en el planteamiento de una ecuación diferencial son los más importantes para identificar con facilidad el tipo de ED y consecuentemente, su método de solución?
Debe proporcionar una respuesta amplia, utilizando ejemplos concretos (pueden incluirse como archivos adjuntos o incrustados, usando las herramientas de la plataforma).
Además de la intervención propia, debe replicar al menos la intervención de 2 compañeros, en las que enriquezca o ponga en discusión lo planteado por ellos, proporcionando el debido sustento a sus aportes.
Se dispone de 4 días a partir del momento en que se habilita el foro, para realizar todas las participaciones solicitadas. El mismo se cerrará al 00:00 del día siguiente de la fecha límite y a partir de ese momento, no se recibirán más intervenciones, incluyendo aquellas que se hagan llegar por otros canales como la mensajería interna.
La aprobación de la actividad estará sujeta a los siguientes criterios:
Cumplimiento del plazo de entrega y del número de intervenciones pedidas.
Precisión de la definición dada
Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.
No olviden ir trabajando en las listas de ejercicios que aparecen en las fuentes facilitadas:
a. Lista de ejercicios del Profesor Allan Lacy.
b. Lista de ejercicios del Profesor José Rosales-Ortega.
c. Libros de Kiseliov et. al. y Dennis Zill.
Los espero pronto en el foro y estaré al tanto de sus actividades... ¡Nos seguimos viendo virtualmente!
DANIEL

Clase #3:


Clase 3: Algunas aplicaciones de las ED de primer orden a otras disciplinas.
¡Arrancamos la tercera y última semana en la cubriremos el primer capítulo de nuestro curso!
Y continuamos con contenidos que, de alguna manera ya hayan trabajado en curso propios de sus disciplinas o se les hagan familiares luego... Estudiaremos las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales vistas en las 2 semanas anteriores. ¡Comencemos!
Aplicaciones de las ED de primer orden
Las ecuaciones diferenciales tienen diversidad de aplicaciones en ramas como la física, la biología, termodinámica, etc. Vamos a ver una de serie de estas aplicaciones en las que las ecuaciones de primer tienen un papel preponderante en el estudio y modelado de varios fenómenos. Comenzamos con varios de ellos...
a. Ecuación Diferencial de una familia uniparamétrica de curvas.
Geométricamente hablando, una familia de curvas corresponde a un conjunto de curvas de satisfacen una determinada ecuación (algebraica) en cuya forma está presente un parámetro (constante numérica). Generalmente se representan por medio de una ecuación cuya estructura es:
$\varphi(x, y, a) = C$
En la que x representa variable independiente, la variable dependiente es y, además de que a representa la constante arbitraria. Derivando a ambos lados y despejando la derivada (si el parámetro desaparece tras la derivación o bien, eliminando el parámetro al sustituir lo hallado en la ecuación original), se debe llegar a una ecuación diferencial de la forma:
$y' = f(x, y)$
Que corresponde a alguno de los tipos ya estudiados y que, por ende, se conoce su método de solución.


b. Trayectorias Ortogonales
Las trayectorias ortogonales de una familia de curvas corresponden a otra familia de curvas que cumplen una propiedad en particular: en los puntos de intersección entre curvas de las familias mencionadas, las tangentes a dichas curvas son ortogonales, como se aprecia en el gráfico siguiente:
Para calcular la ED de una familia de trayectorias ortogonales a otra familia dada, requerimos conocer de la ecuación algebraica que representa a la dada inicialmente y aplicar el proceso previamente visto de hallar la ED:
$y' = f(x, y)$



Ciclo de Maestría en Entornos V | Microsoft Word - FASE_7_Estruct | MA-1005 Alajuela (Virtual): Clase

No es seguro | emoodle.emate.ucr.ac.cr/mod/page/view.php?id=16137&forceview=1

Daniel González Núñez

ED:

$$y' = f(x, y)$$

Luego esta ED se transforma a:

$$y' = \frac{-1}{f'(x,y)}$$

La cual corresponde a la ED de las trayectorias ortogonales y, por ende, es la que resolvemos para encontrar a familia buscada.

c. Crecimiento poblacional

El estudio de las poblaciones mediante una ecuación de primer orden se limitará al estudio de poblaciones aisladas y sin migración. Para ello, se establece una ED a partir de la Ley de Malthus, la cual indica que el crecimiento de una población (respecto al tiempo) con las características anteriores, se da con una tasa proporcional a la cantidad presente, donde la constante de proporcionalidad está dada por la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad. Es decir, el modelo está dado por:

$$y' = ky$$

Condicionado a una población inicial:

$$y(0) = y_0$$

Y a la condición

$$y(t_0) = P$$

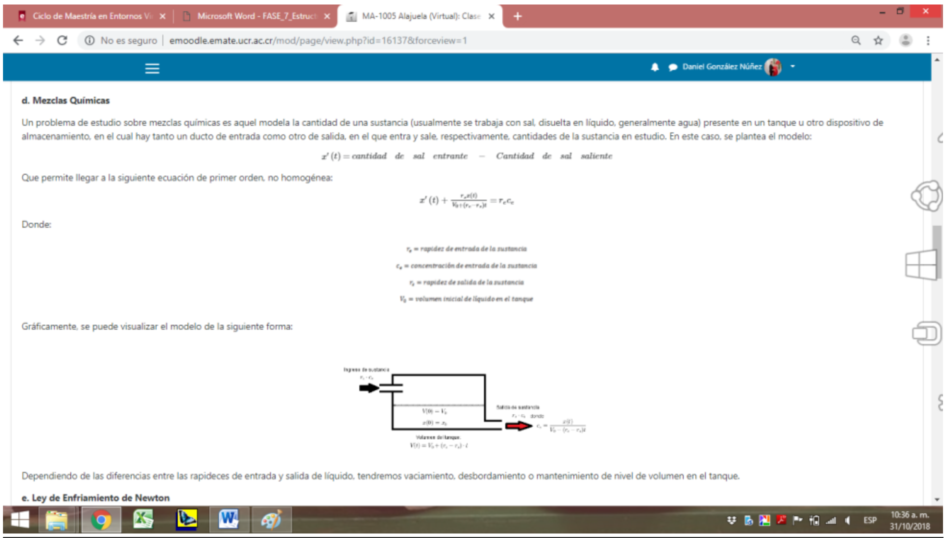
Que refleja la cantidad de población después de un determinado tiempo t_0.

La solución general de la ED planteada antes es:

$$y(t) = Ce^{kt}$$

La cual se particulariza tras la aplicación de las 2 condiciones anteriores.

10:35 a. m. 31/10/2018



Ciclo de Maestría en Entornos V | Microsoft Word - FASE_7_Estruct | MA-1005 Alajuela (Virtual): Clase

No es seguro | emoodle.emate.ucr.ac.cr/mod/page/view.php?id=16137&forceview=1

Daniel González Núñez

d. Mezclas Químicas

Un problema de estudio sobre mezclas químicas es aquel modela la cantidad de una sustancia (usualmente se trabaja con sal, disuelta en líquido, generalmente agua) presente en un tanque u otro dispositivo de almacenamiento, en el cual hay tanto un ducto de entrada como otro de salida, en el que entra y sale, respectivamente, cantidades de la sustancia en estudio. En este caso, se plantea el modelo:

$$x'(t) = cantidad \quad de \quad sal \quad entrante \quad - \quad Cantidad \quad de \quad sal \quad saliente$$

Que permite llegar a la siguiente ecuación de primer orden, no homogénea:

$$x'(t) + \frac{r_s x(t)}{V_0 + (r_e - r_s)t} = r_e c_e$$

Donde:

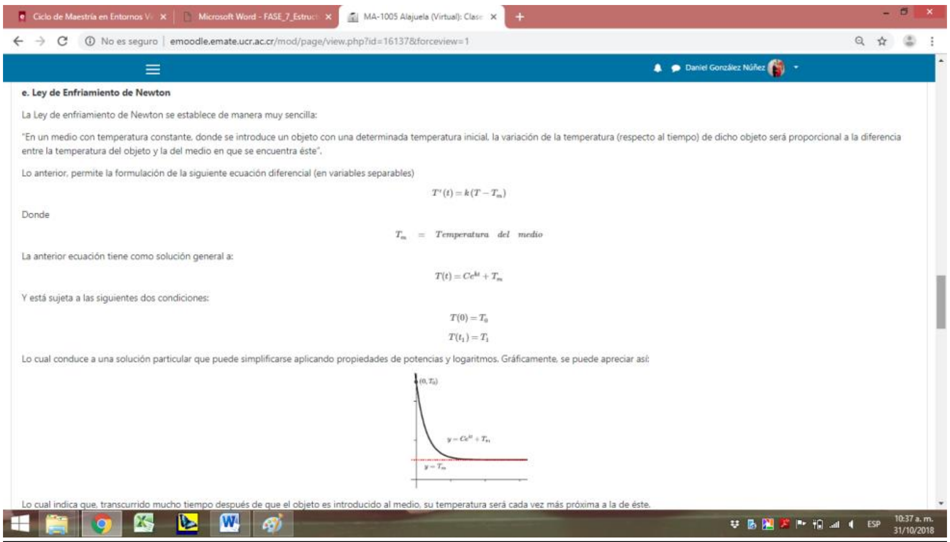
$$r_e = rapidez\ de\ entrada\ de\ la\ sustancia$$
$$c_e = concentración\ de\ entrada\ de\ la\ sustancia$$
$$r_s = rapidez\ de\ salida\ de\ la\ sustancia$$
$$V_0 = volumen\ inicial\ de\ líquido\ en\ el\ tanque$$

Gráficamente, se puede visualizar el modelo de la siguiente forma:

Dependiendo de las diferencias entre las rapideces de entrada y salida de líquido, tendremos vaciamiento, desbordamiento o mantenimiento de nivel de volumen en el tanque.

e. Ley de Enfriamiento de Newton

10:36 a. m. 31/10/2018



Ciclo de Maestría en Entornos V | Microsoft Word - FASE_7_Estruct | MA-1005 Alajuela (Virtual): Clase

No es seguro | emoodle.emate.ucr.ac.cr/mod/page/view.php?id=16137&forceview=1

Daniel González Núñez

e. Ley de Enfriamiento de Newton

La Ley de enfriamiento de Newton se establece de manera muy sencilla:

"En un medio con temperatura constante, donde se introduce un objeto con una determinada temperatura inicial, la variación de la temperatura (respecto al tiempo) de dicho objeto será proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la del medio en que se encuentra éste".

Lo anterior, permite la formulación de la siguiente ecuación diferencial (en variables separables)

$$T'(t) = k(T - T_m)$$

Donde

$$T_m \quad = \quad Temperatura \quad del \quad medio$$

La anterior ecuación tiene como solución general a:

$$T(t) = Ce^{kt} + T_m$$

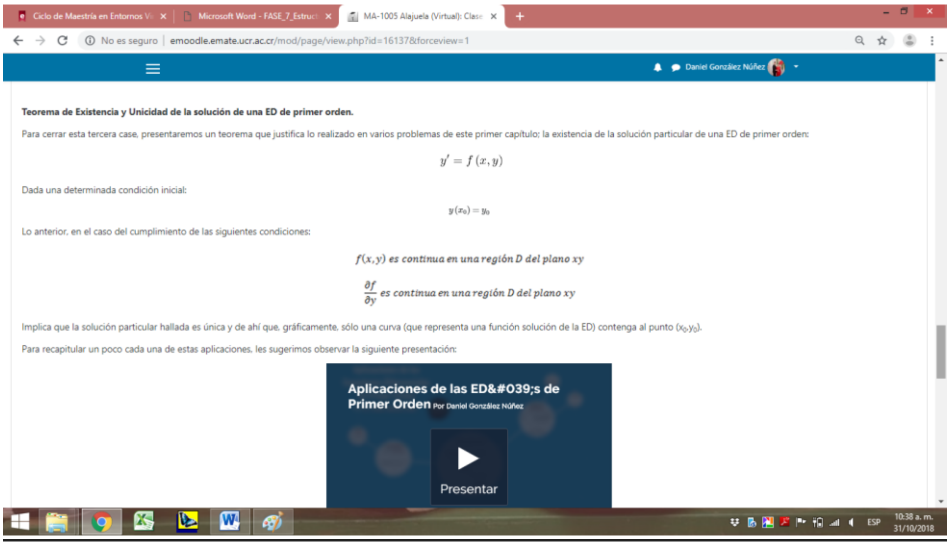
Y está sujeta a las siguientes dos condiciones:

$$T(0) = T_0$$
$$T(t_1) = T_1$$

Lo cual conduce a una solución particular que puede simplificarse aplicando propiedades de potencias y logaritmos. Gráficamente, se puede apreciar así:

Lo cual indica que, transcurrido mucho tiempo después de que el objeto es introducido al medio, su temperatura será cada vez más próxima a la de éste.

10:37 a. m. 31/10/2018



Teorema de Existencia y Unicidad de la solución de una ED de primer orden.

Para cerrar esta tercera case, presentaremos un teorema que justifica lo realizado en varios problemas de este primer capítulo; la existencia de la solución particular de una ED de primer orden:

$$y' = f(x, y)$$

Dada una determinada condición inicial:

$$y(x_0) = y_0$$

Lo anterior, en el caso del cumplimiento de las siguientes condiciones:

$$f(x,y) \text{ es continua en una región } D \text{ del plano } xy$$

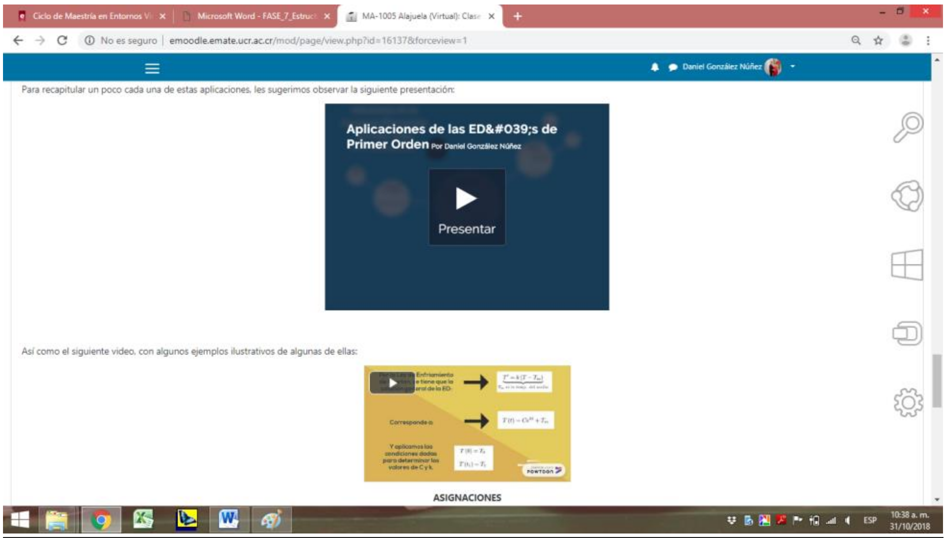
$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ es continua en una región } D \text{ del plano } xy$$

Implica que la solución particular hallada es única y de ahí que, gráficamente, sólo una curva (que representa una función solución de la ED) contenga al punto (x_0,y_0).

Para recapitular un poco cada una de estas aplicaciones, les sugerimos observar la siguiente presentación:

Aplicaciones de las ED's de Primer Orden Por Daniel González Núñez

Presentar



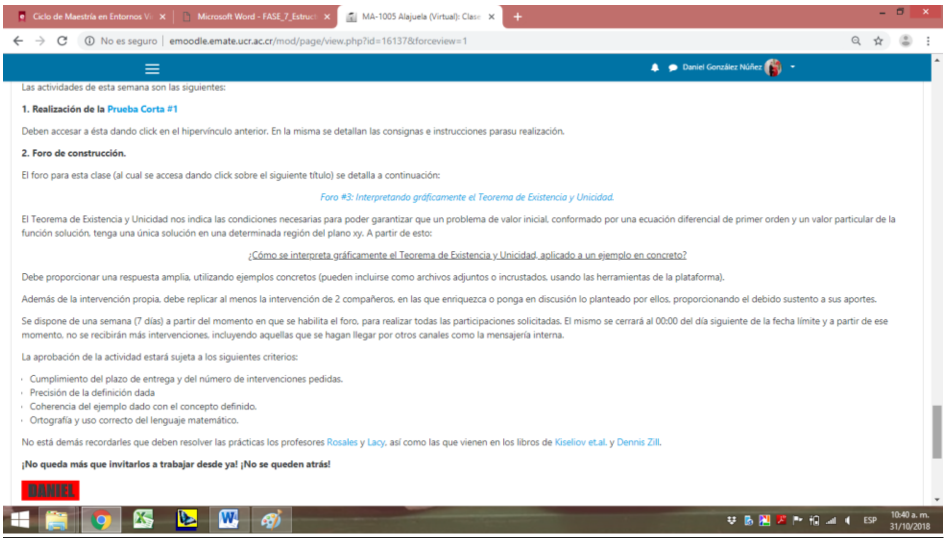
Para recapitular un poco cada una de estas aplicaciones, les sugerimos observar la siguiente presentación:

Aplicaciones de las ED's de Primer Orden Por Daniel González Núñez

Presentar

Así como el siguiente video, con algunos ejemplos ilustrativos de algunas de ellas:

ASIGNACIONES



Las actividades de esta semana son las siguientes:

1. Realización de la Prueba Corta #1

Deben accesar a ésta dando click en el hipervínculo anterior. En la misma se detallan las consignas e instrucciones parasu realización.

2. Foro de construcción.

El foro para esta clase (al cual se accesa dando click sobre el siguiente título) se detalla a continuación:

Foro #3: Interpretando gráficamente el Teorema de Existencia y Unicidad.

El Teorema de Existencia y Unicidad nos indica las condiciones necesarias para poder garantizar que un problema de valor inicial, conformado por una ecuación diferencial de primer orden y un valor particular de la función solución, tenga una única solución en una determinada región del plano xy. A partir de esto:

¿Cómo se interpreta gráficamente el Teorema de Existencia y Unicidad, aplicado a un ejemplo en concreto?

Debe proporcionar una respuesta amplia, utilizando ejemplos concretos (pueden incluirse como archivos adjuntos o incrustados, usando las herramientas de la plataforma).

Además de la intervención propia, debe replicar al menos la intervención de 2 compañeros, en las que enriquezca o ponga en discusión lo planteado por ellos, proporcionando el debido sustento a sus aportes.

Se dispone de una semana (7 días) a partir del momento en que se habilita el foro, para realizar todas las participaciones solicitadas. El mismo se cerrará al 00:00 del día siguiente de la fecha límite y a partir de ese momento, no se recibirán más intervenciones, incluyendo aquellas que se hagan llegar por otros canales como la mensajería interna.

La aprobación de la actividad estará sujeta a los siguientes criterios:

- Cumplimiento del plazo de entrega y del número de intervenciones pedidas.
- Precisión de la definición dada
- Coherencia del ejemplo dado con el concepto definido.
- Ortografía y uso correcto del lenguaje matemático.

No está demás recordarles que deben resolver las prácticas los profesores Rosales y Lacy, así como las que vienen en los libros de Kiseliov et.al. y Dennis Zill.

¡No queda más que invitarlos a trabajar desde ya! ¡No se queden atrás!

DANIEL

DOCUMENTOS ELABORADOS

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SEDE INTERUNIVERSITARIA DE ALAJUELA
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

GUÍA DIDÁCTICA
CURSO: MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería (Exclusivo para estudiantes en condición de rezago de la Sede Interuniversitaria de Alajuela)

Profesor: Daniel González Núñez

Grupo: 03 (Virtual)
Créditos: 4
Horas Semanales: 12
Naturaleza: Teórico-Práctico

I Ciclo, 2019

FUNDAMENTACIÓN

Reciba la más calurosa bienvenida al curso virtual MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería. Este curso le brindará las herramientas conceptuales y procedimentales de esta rama del Análisis Matemático que requerirá para poder comprender, analizar y aplicar al estudio de fenómenos propios de áreas como la química, física, biología e ingeniería.

La modelización de fenómenos ligados a las disciplinas del conocimiento mencionadas, requiere que el estudiante desarrolle la capacidad de resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales y además de ello, interpretar analítica, geométrica y numéricamente las soluciones con el fin de comprender tales fenómenos y con base en ellos, poder establecer una toma de decisiones dentro de su campo de acción.

Por tanto, es de vital importancia para el profesional en formación de las carreras del área de la Ingeniería, el estudio y aprendizaje de los principales métodos de solución para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y algunas en derivadas parciales, en sus casos más representativos y aplicables a la cotidianeidad del profesional.

OBJETIVOS

Objetivo general

- Aplicar la teoría básica y los principales métodos de solución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y en Derivadas Parciales, con el fin de modelar, comprender y analizar fenómenos de diversa índole, ligados al área de especialidad.

Objetivos específicos

- Reconocer diversos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden, con el fin de determinar y aplicar el método de solución más pertinente.

- Generalizar el concepto de ecuación diferencial lineal al orden "n" con el propósito de determinar su solución mediante distintos métodos.

- Estudiar la solución de ecuaciones diferenciales por medio de series de potencias, a fin de analizar casos distintos a los abordados por métodos clásicos.

- Aplicar la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, integro-diferenciales e integrales con condiciones iniciales, ligadas a problemas de aplicación.

- Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales por distintos métodos, con el fin de aplicarlos a la modelización de situaciones cotidianas.

- Resolver casos sencillos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el método de separación de variables, con el fin de estudiar fenómenos en los que intervienen funciones de al menos 2 variables.

CONTENIDOS

El curso está dividido en 6 grandes capítulos, a saber:

- Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

- Definición de ecuación diferencial ordinaria y en derivadas parciales.
- Solución, orden de una ecuación diferencial.
- Existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial:
  $$y' = f(x,y); \quad y(x_0) = y_0$$
- Ecuaciones diferenciales en variables separables. Cambios de variable.
- Ecuaciones homogéneas y reducibles a homogéneas.
- Ecuaciones exactas y reducibles a exactas por medio de un factor integrante.
- Ecuaciones lineales y reducibles a ellas. (Ecuación de Bernoulli, Ecuación de Riccatti.)
- Variable ausente en ecuaciones de segundo orden.
- Aplicaciones.

- Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden "n"

- Problemas de valor inicial. Existencia y unicidad de solución.
- Dependencia lineal e independencia lineal de soluciones. El Wronskyano.
- Ecuación diferencial lineal de orden n. Espacio solución y su dimensión. Solución general.

- Reducción de orden (obtención de una segunda solución) a partir de una solución conocida.
- Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes y su ecuación característica.
- Ecuaciones diferenciales lineales NO homogéneas. Método de variación de parámetros y Método de coeficientes indeterminados.
- Ecuación de Cauchy-Euler.

* <u>Ecuaciones Diferenciales por medio de Series de Potencias</u>

- Puntos ordinarios. Solución en una vecindad de un punto ordinario.
- Puntos singulares. Solución en una vecindad de un punto singular regular.
- Método de Frobenius.
- Casos especiales: raíces repetidas y diferencia entera de raíces.

* <u>Transformada de la Laplace</u>

- Definición y propiedades.
- Propiedades operacionales: teoremas de traslación, derivada de una transformada, transformada de una integral, transformada de una función periódica. Trasformada de un cociente.
- Funciones impulso de Heaviside, función delta de Dirac y la función Gamma.
- Inversa de la transformada de Laplace.
- Transformada de Laplace de la convolución de funciones.
- Aplicaciones de la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales.

* <u>Sistemas de Ecuaciones Diferenciales</u>

- Uso de operadores para eliminar incógnitas.
- Forma matricial de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Matriz fundamental.
- Uso de valores y vectores propios para resolver sistema lineales homogéneos de primer orden.
- Coeficientes Indeterminados y Variación de parámetros.

* <u>Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.</u>

- Definición y ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
- Solución de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, sencillas.
- Funciones ortogonales. Series de Fourier.
- Método de separación de variables.
- Ecuación de onda (vibraciones u oscilaciones).
- Ecuación del calor (conducción o difusión del calor).
- Ecuación de Laplace (potencial eléctrico o gravitacional).

METODOLOGÍA DE TRABAJO

La metodología de trabajo será teórico-práctica, en ambiente 100% virtual, en el cual los participantes deberán ser actores activos del proceso en todo momento, pues a diferencia de la modalidad presencial, en la que el docente acapara el trabajo referente a la transmisión de conceptos, teoremas, definiciones y detales prácticos, el estudiante deberá estar inmerso en procesos de construcción del conocimiento, tanto de forma individual (por medio de clases previamente publicadas por el tutor) como de forma colectiva y colaborativa con sus compañeros, a través de actividades como foros y wikis. Se publicarán clases semanales en la plataforma (específicamente los días lunes, en el transcurso de la mañana, de manera que se cuente con toda la semana para trabajar), donde el estudiante deberá estudiar todo el material relacionado a ella y, además, cumplir con las asignaciones que planteen en varias de ellas. Aunado a ello, el estudiante deberá aplicar, reforzar y ampliar sus conocimientos por medio de la realización de listas de ejercicios de forma, así como de pruebas cortas en línea de carácter formativo. Los foros y wikis se habilitarán paralelamente junto con las clases y los plazos de participación y realización serán de una o dos semanas, dependiendo del grado de elaboración de cada uno (en cada clase se especificará la duración de cada uno en particular). En caso de que se solicite la entrega de algún documento, se habilitará junto con la clase, el espacio correspondiente para ello, junto con su respectivo plazo (una semana, por lo general). <u>Se recuerda que cada una de las actividades planteadas, a pesar de no tener peso cuantitativo en la nota, deben ser obligatoriamente realizadas y aprobadas, como parte de los criterios de evaluación del curso. El incumplimiento o no aprobación de una de ellas, implica la pérdida del curso, independientemente del rendimiento académico obtenido en las pruebas presenciales.</u>

Todo lo anterior se hará con la supervisión y apoyo constante por parte del tutor, mediante canales de comunicación como el Foro de Consulta Virtual y la mensajería interna, en donde los aprendices podrán esclarecer todas sus dudas e inquietudes respecto a la materia de estudio. Asimismo, la mensajería interna será el medio principal de comunicación entre estudiantes y docente, aunque también se echará mano del correo institucional (al cual tienen asociada su cuenta de Moodle) y en último caso, para situaciones de urgencia únicamente, se empleará la aplicación Telegram, mediante la creación de un grupo.

EVALUACIÓN

A pesar del carácter virtual de este curso y su población cursante, la evaluación se ajusta, por respeto a los lineamientos de la Cátedra del curso, al modelo de evaluación constituido por 3 exámenes parciales <u>*presenciales*</u>, cuyo peso porcentual es el siguiente:

- 30% el examen de menor nota
- 35% los 2 exámenes restantes.

Aunado a lo anterior y a pesar de <u>*no*</u> tener peso cuantitativo en la nota del curso, existirán una serie de actividades evaluativas, a saber:

- Foros (2 por capítulo)

- Wikis (1 por capítulo)
- Pruebas cortas (1 por capítulo)
- Otras actividades que se especificarán con el transcurrir del curso.

Cuya resolución y/o participación serán de carácter e*strictamente obligatorio* y que por ende, constituirán un requisito fundamental para poder, junto con el alcance de una nota mínima, aprobar el curso.
Los criterios de aprobación/reprobación del curso son los siguientes: Si NA representa la nota de aprovechamiento, calculada mediante la fórmula:

$$NA = \min\{IP, IIP, IIIP\}*30 + [\{IP, IIP, IIIP\} - \min\{IP, IIP, IIIP\}]*70$$

Donde IP, IIP y IIIP representan, respectivamente, las notas del primer, segundo y tercer parcial, entonces:

- Si NA es mayor o igual a 6.75 (7), el estudiante aprueba el curso.
- Si NA es mayor o igual a 57.5 pero menor a 67.5, el estudiante tiene derecho a realizar prueba de ampliación. Los contenidos a evaluar serán aquellos correspondientes a los parciales en los que el estudiante obtuvo nota inferior a 70.
- Si NA es menor a 57.5, el estudiante reprueba el curso.

La nota se redondea al entero más cercano cuando la parte decimal es mayores o igual a .75 pero menor a .24. De ser esta parte mayor o igual a .25 pero menor .75, se redondea a la media unidad.
Nuevamente, se reitera que además de la obtención de una nota superior o igual a 7, se debe cumplir con *todas y cada una de las actividades virtuales obligatorias*, las cuales por su naturaleza *no se reponen.*
En casos debidamente justificados, tales como enfermedad del estudiante (con justificación médica), o haber presentado dos exámenes el mismo día, o choque de exámenes (con constancia del coordinador respectivo), o la muerte de un pariente hasta segundo grado de consanguinidad, o casos de giras (reportados por escrito) y con el visto bueno del órgano responsable, se le permitirá al estudiante reponer el examen durante el periodo lectivo.

En cualquier caso, debe presentar los documentos probatorios y la solicitud de reposición al profesor de su grupo en los primeros tres días hábiles después de realizado el examen. Al estudiante se le hará un examen de reposición, según la fecha indicada en la tabla anterior

Ningún estudiante está autorizado a entrar a realizar una prueba escrita, después de 30 minutos de iniciada la misma, ni retirarse antes de 30 minutos de iniciada, salvo casos de fuerza mayor.

Se permite el uso de calculadoras no programables en los exámenes. No se permite el uso de celulares u otros dispositivos electrónicos en exámenes ni en clases, sin la autorización del profesor.

El profesor del grupo debe entregar a los estudiantes los exámenes calificados, a más tardar **diez días hábiles** después de haberse realizado la prueba, de lo contrario el estudiante puede presentar el respectivo reclamo a la coordinación.

La pérdida comprobada de un examen por parte del profesor da derecho al estudiante a una nota equivalente al promedio de su aprovechamiento o, a criterio del estudiante, a repetir el examen.

El estudiante tiene derecho a reclamar ante el profesor lo que considere mal evaluado del examen, en los tres días hábiles posteriores a la finalización de los 10 días hábiles de la entrega de la prueba calificada.

En el caso extremo de no ponerse de acuerdo el profesor y el estudiante en cuanto a la calificación del examen, éste último podrá apelar ante el Director de la Unidad Académica respectiva en los tres días hábiles siguientes, aportando una solicitud escrita razonada y las pruebas del caso. El Director de la Unidad Académica respectiva, con asesoría de la Comisión de Evaluación y Orientación, emitirá su resolución escrita a más tardar siete días hábiles después de recibida la apelación.

CRONOGRAMA

Sem.	*Capítulo*	*TEMAS*	*Evaluaciones*
1	*ED´s de Primer Orden*	➢ *Definiciones y conceptos básicos* ➢ *Ecuaciones Separables y reducibles a ellas* ➢ *Ecuaciones Homogéneas y reducibles a ellas*	➢ *Foro 1: Solución de una ED.*
2	*ED´s de Primer Orden*	➢ *Ecuaciones Exactas y reducibles a ellas; Ecuaciones de Bernoulli y Riccatti.* ➢ *Ecuaciones de Primer y Segundo Orden con variable ausente*	➢ *Foro 2: ¿Cómo determinar el tipo de ED de primer orden?* ➢ *Wiki: Diagrama de Identificación de una ED de primer orden y construcción de procedimiento de solución.*
3	*ED´s de Primer Orden*	➢ *Teorema de Existencia y Unicidad de la Solución de una ED.* ➢ *Aplicaciones de las ED de primer orden a fenómenos de la física, biología y química.*	➢ *I Prueba Corta Virtual: Tres ejercicios de selección única.* ➢ *Asignación de 2 ejercicios de los temas de las 2 primeras semanas.*
4	*EDO´s lineales de orden "n"*	➢ *Extensión del Teorema de Existencia y Unicidad al caso general.* ➢ *Definición de Espacio Solución y su dimensión. El Wronskiano.* ➢ *Ecuaciones lineales de orden "n" homogéneas con coeficientes constantes*	➢ *Foro: ¿Ecuación Característica u Operadores Diferenciales?*

5	*EDO´s lineales de orden "n"*	➢ *Ecuaciones lineales de orden "n" no homogéneas con coeficientes constantes. Coeficientes Indeterminados.* ➢ *Ecuaciones lineales de orden "n" con coeficientes variables. Fórmula de Abel para hallar una segunda solución de una ED de segunda orden.* ➢ *Variación de Parámetros para resolver ED de orden "n" no homogéneas con coeficientes variables.*	➢ *Foro: ¿Coeficientes Constantes o Variación de Parámetros?* ➢ *Wiki: Cuadro Resumen de solución de una ED lineal no homogénea de orden "n".*
6	*EDO´s lineales de orden "n"*	➢ *Ecuación de Euler* ➢ *Aplicaciones de las EDO lineales de Orden "n"* ➢ ***Fin de la materia del I Parcial***	➢ *Prueba Corta: 3 ejercicios de Selección única.*
7	*ED mediante series*	➢ *Puntos Ordinarios y Singulares.* ➢ *Solución alrededor de puntos ordinarios*	➢ *Foro: ¿Cómo distinguir entre puntos ordinarios y singulares en una ED de segundo orden con coeficientes variables?* ➢ ***I PARCIAL***
8	*ED mediante series*	➢ *Solución alrededor de puntos singulares* ➢ *Uso de la Fórmula de Abel para casos especiales: Diferencia entera de raíces y raíces iguales.*	➢ *Foro: Recordando la división de polinomios para hallar una segunda solución en casos especiales.* ➢ *Wiki: Esquema sobre solución de ED's mediante series de potencias.* ➢ *Prueba corta: 3 ejercicios de selección única.*
9	*Transformada de Laplace*	➢ *Definición de Transformada de Laplace* ➢ *Propiedades Operacionales de la Transformada de Laplace.*	➢ *Foro: Definiendo nuevas propiedades de la Transformada de Laplace a partir de la definición.*
10	*Transformada de Laplace*	➢ *Función de Heaviside, Delta de Dirac y Gamma.* ➢ *Convolución de Funciones*	➢ *Foro: ¿Cuándo usar propiedades o la definición?* ➢ *Wiki: Construcción de Tabla de Transformadas de*

			Laplace.
11	*Transformada de Laplace*	➢ *Solución de Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Integro-Diferenciales y Ecuaciones Integrales mediante la Transformada de Laplace.* ➢ *Aplicación de la Transformada de Laplace al cálculo de integrales impropias* ➢ ***<u>Fin de la materia del II Parcial</u>***	➢ *Prueba corta: 3 ejercicios de selección única.*
12	*Sistemas de ED's*	➢ *Conceptos básicos sobre SED's* ➢ *Solución de SED´s mediante Operadores Diferenciales y Regla de Cramer*	➢ *Foro: ¿Gauss-Jordan o Regla de Cramer?* ➢ ***II PARCIAL***
13	*Sistemas de ED's*	➢ *SED´s Lineales de Primer Orden Homogéneos* ➢ *Variación de Parámetros y Coeficientes Indeterminados.*	➢ *Foro: ¿Cómo reconocemos el procedimiento a emplear para resolver un SED?*
14	*Sistemas de ED's / ED´s Parciales*	➢ *Solución de SED´s mediante Transformada de Laplace* ➢ *Definición de Serie de Fourier*	➢ *Wiki: Construyendo un diagrama para resolver un SED.* ➢ *Prueba Corta: Selección única sobre solución de SED´s.*
15	*ED´s Parciales*	➢ *Series de cosenos y senos de Fourier* ➢ *Aplicación al cálculo de series numéricas.*	➢ *Foro: ¿Cómo distinguir entre funciones pares e impares?*
16	*ED´s Parciales*	➢ *Separación de Variables para resolver ED's en Derivadas Parciales.* ➢ *Ecuaciones de Calor, Onda y Laplace.* ➢ ***<u>Fin de la materia del III Parcial</u>***	➢ *Foro: Diferencias entre las 3 ecuaciones en derivadas parciales estudiadas.* ➢ *Wiki: Esquema de Solución de las ED's de Calor, Onda y Laplace.* ➢ *Prueba Corta: Ejercicio de selección única sobre una ED en Derivadas Parciales*
17		➢ *Repaso III Parcial*	➢ ***III PARCIAL***
18		➢ *Repaso para Ampliación*	➢ ***AMPLIACIÓN***

PRESENTACIÓN DEL TUTOR

El docente a cargo es el Prof. Daniel González Núñez, quien ostenta desde el 2012 el grado de Licenciado en Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Costa Rica (UCR). A nivel personal, está casado desde febrero del 2017 con Silvia Castro y reside en la zona de Desamparados de Alajuela, a poca distancia de la Sede Interuniversitaria. Labora desde el año 2010 como docente de Matemática en la dicho recinto universitario, impartiendo cursos como Precálculo, Cálculo I, II y III, Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales, siendo ésta la décima ocasión que imparte este último.

Ha laborado también para la Universidad Técnica Nacional (UTN) en varias oportunidades desde el 2011, tanto la Sede Central de Alajuela como en la Sede de Atenas, en cursos como Matemática General para Ingeniería y Matemática General para Administración, además de Cálculo y en 2017, como profesor de las denominadas "Mentorías", como parte del Programa de Éxito Académico de esta universidad. Actualmente también está laborando con esta casa de estudios, en diversos cursos del área de Matemática y Estadística.

También, ha tenido experiencia laborando como docente de la disciplina para universidades privadas como la Universidad Santa Lucía, Universidad Central y Universidad del Diseño.

Por último, el docente se encuentra en la recta final del proceso de obtención de la Maestría en Entornos Virtuales de Aprendizaje, impartida en conjunto por la Universidad Técnica Nacional y el Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente (Virtual Educa) de Argentina.

De parte de este servidor, reciban la más calurosa bienvenida, esperando que esta nueva experiencia sea lo más significativa y provechosa para todos y cada uno de los que participamos en ella. ¡ADELANTE, UN ARDUO TRABAJO NOS ESPERA, CON LA ESPERANZA DE QUE ÉSTE RINDA EXCELENTES FRUTOS AL FINAL DEL PERIODO!

Con afecto, Daniel…

Correo electrónico del docente: daniel.gonzalez_n@ucr.ac.cr

BIBLIOGRAFÍA

1. Cengel, Y. and Palm III, W., Ecuaciones diferenciales para Ingeniería y ciencias. McGrawHill, México, 2014.
2. Rai, B and Choudhury, D.P., A Course in Ordinary Diferential Equations, Second Edition, NAROSA, New Delhi, 2013.
3. Edwards, C. Henry y David E. Penney, Ecuaciones Diferenciales, Pearson Educación, México, 2001.
4. Kiseliov, A., M. Krasnov y G. Makarenko, Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Editorial MIR, Moscú, 1988.

5. Kumar, Rabindra, Introduction to Diferential Equations, PHI Learning, New Delhi, 2010.
6. Nagle, R. Kent, Edward B. Saí y A. D. Snider, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, Pearson Educación, México, 2001.
7. Rainville, Earl D, Phillip E. Bedient y R. E. Bedient, Ecuaciones Diferenciales, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1998
8. Simmons, George F., Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas, McGraw-Hill, Madrid, 1997.
9. Simmons, George F., Steve G. Krantz, Ecuaciones Diferenciales: Teoría, técnica y práctica, McGraw-Hill, México, 2007.
10. Spiegel, Murray R., Ecuaciones Diferenciales Aplicadas, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1987.
11. Zill, Dennis G. y Michael R. Cullen, Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera. 5. edición. Thomson Learning, México, 2002.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA | Sede Interuniversitaria de Alajuela

CURSO: MA-1005 ECUACIONES DIFERENCIALES

CAPÍTULO 1

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

I SEMESTRE, 2019

$$
\begin{tikzcd}
y' + p(x)\,y = q(x) & & M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \\
& F(x,y,y') = 0 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
g(y)\,dy = f(x)\,dx & & y' = \phi\left(\dfrac{y}{x}\right)
\end{tikzcd}
$$

Contents

1 Capítulo 1: Conceptos básicos y ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.1 Conceptos básicos.

Definición 1 (Ecuación Diferencial) *Una ecuación diferencial es aquella que involucra a una función incógnita o función desconocida, sus variables y sus derivadas.*

Ejemplo 1 *Las siguientes corresponde a ecuaciones diferenciales:*

Solución 1

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= e^x \\ \frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y &= \cos(x) \\ t^2y'' + 2ty' + 3y &= 0 \\ \left(3xy^2 + 2x\right)dx + \left(6x^2y - y\right)dy &= 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Definición 2 (Ecuación Diferencial Ordinaria) *Una ecuación diferencial se llama ordinaria (EDO), cuando la función incógnita y consecuentemente, sus derivadas, dependen de una sola variable.*

En el ejemplo anterior, se puede apreciar que las primeras 4 ecuaciones diferenciales corresponden a ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que la función incógnita y sus derivadas, corresponden a funciones de una variable (Supóngase que y corresponde a la función incógnita, mientras que x y t corresponden a las variables independientes). Cabe destacar que la ecuación

$$\left(3xy^2 + 2x\right)dx + \left(6x^2y - y\right)dy = 0$$

se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left(3xy^2 + 2x\right)dx + \left(6x^2y - y\right)dy &= 0 \\ \left(3xy^2 + 2x\right) + \left(6x^2y - y\right)\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{3xy^2 + 2x}{6x^2y - y} \\ y' &= -\frac{3xy^2 + 2x}{6x^2y - y} \end{aligned}$$

De manera que se puede ver más fácilmente como una EDO

Definición 3 (Ecuaciones Diferenciales Parciales o en Derivadas Parciales) *Una ecuación diferencial se llama parcial o en derivadas parciales (EDP), cuando su función incógnita y las derivadas de estas, dependen de varias variables.*

En el ejemplo anterior, la última ecuación corresponde a una ecuación diferencial parcial, cuya función incógnita es y y las variables independientes son x y y.

Definición 4 (Orden de una ecuación diferencial) *El orden de una ecuación diferencial, corresponde al mayor de los órdenes de las derivadas de la función incógnita presentes en dicha ecuación.*

Como podemos ver en el primer ejemplo, la primera y cuarta ecuación corresponden a ED de orden uno, mientras que la tercera y quinta son de orden 2. Finalmente, la segunda ecuación corresponde a una ED de grado 3.
En general, se puede hacer referencia a una ecuación diferencial ordinaria de orden n, cuya variable independiente es x y variable dependiente y, como se muestra a continuación:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$

Definición 5 (Solución de una ecuación diferencial) *Una función definida en un intervalo abierto, que puede ser todo $\mathbb{R}$ inclusive, se llama solución de una ecuación diferencial, si al sustituir dicha función y sus derivadas en la ED, se obtiene una identidad, es decir, se cumple la igualdad establecida.*

Ejemplo 2 *Muestre que la función* $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$ *con* $x \neq 0$, *es solución de la ED:* $xy' + y = \cos(x)$.

Solución 2 *Tenemos, derivando y con respecto a x, que* $y' = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$. *Luego, sustituimos y y y' en la ecuación dada:*

$$\begin{aligned}
xy' + y &= x\left(\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}\right) + \frac{\sin(x)}{x} \\
&= \frac{x^2\cos(x) - x\sin(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x} \\
&= \frac{x^2\cos(x) - x\sin(x) + x\sin(x)}{x^2} \\
&= \frac{x^2\cos(x)}{x^2} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Tal y como queríamos.

Ejemplo 3 *Compruebe que* $y = x\sin(x)$ *es solución de la ecuación* $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$.

Solución 3 *Primeramente, determinamos y' y y''*

$$y' = \sin(x) + x\cos(x)$$

$$y'' = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x) \quad \Longrightarrow \quad y'' = 2\cos(x) - x\sin(x)$$

Se sustituye en la ecuación dada:

$$\begin{aligned}
x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y &= x^2(2\cos(x) - x\sin(x)) - 2x(\sin(x) + x\cos(x)) + (x^2+2)x\sin(x) \\
&= 2x^2\cos(x) - x^3\sin(x) - 2x\sin(x) - 2x^2\cos(x) + x^3\sin(x) + 2x\sin(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.2 Tipos de solución de una ecuación diferencial

Ahora bien, una ecuación diferencial puede tener infinidad de soluciones. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y' - y = 0$$

Tiene como solución a $y = e^x$, pero si observamos con cuidado, vemos que $y_1 = 2e^x$, $y_2 = -e^x$ y $y_3 = \dfrac{e^x}{3}$ también son soluciones. En general entonces, vemos que

$$y = Ce^x$$

para cualquier constante real, es solución general de la ED.
Como otro ejemplo ilustrativo, observe que $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Así mismo, la función $y_3 = 3e^{2x} - 4e^{-x}$ también es solución de la ED, lo cual fácilmente se verifica (hágalo!). Entonces se puede inferir que

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

con c_1 y c_2 constantes reales, también es solución de la ED.

A partir de este par de ejemplos, podemos definir lo siguiente:

Definición 6 (Solución general de una ED) *Se le llama solución general de una ED de orden n, a aquella solución de la ED que involucra n constantes arbitrarias.*

Definición 7 (Solución particular de una ED) *Se le llama solución particular de la ecuación diferencial, a aquella que se obtiene al escoger valores particulares para las constantes arbitrarias de la solución general.*

Ejemplo 4 *Determine la solución general y una solución particular de la ecuación diferencial*

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Solución 4 *Para este caso, se explicó líneas atrás que la solución general está dada por*

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

Mientras que asignando valores a las constantes c_1 y c_2, se obtienen soluciones particulares. Si tomamos $c_1 = c_2 = 1$, una solución particular corresponde a

$$y_p = e^{2x} + e^{-x}$$

Importante 1 *De ahora en adelante, emplearemos la notación para hacer referencia a una solución particular de una ecuación diferencial.*

Ejemplo 5 *Determine la solución general de la ED:*

$$y' - y = 0$$

así como una solución particular de dicha ecuación.

Solución 5 *Antes deducimos que esta ecuación tiene como solución general:*

$$y = Ce^x$$

con $C \in \mathbb{R}$. Así entonces, al asignar cualquier valor a C,obtenemos una solución particular de esta ecuación. Por ejemplo, al hacer $C = 1$, obtenemos como solución particular:

$$y = e^x$$

La obtención de una solución particular de una EDO, se consigue al resolver ya sea un problema de valor inicial o un problema con valores en la frontera. Estos se definen a continuación:

Definición 8 (Problema de valores iniciales) *Un problema de valor inicial o "Problema de Cauchy", es aquel que consiste en hallar una solución particular de una ED la cual está sujeta a valores asignados a la función incógnita y sus derivadas, en UN ÚNICO VALOR de la variable independiente.*

Definición 9 (Problema con valores en la frontera) *Un problema con valores en la frontera, es aquel que consiste en hallar una solución particular de una ED la cual está sujeta a valores asignados a la función incógnita y sus derivadas, en DISTINTOS VALORES de la variable independiente.*

Ejemplo 6 *A continuación se muestran dos ecuaciones diferenciales y condiciones para cada una de ellas*

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 12y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''' - 3y' = 0 \\ y(1) = -2 \\ y'(1) = 0 \\ y''(2) = -1 \end{cases}$$

Determine si son de valor inicial o de valores en la frontera.

Solución 6 *Podemos ver que el primer problema corresponde a uno de valores iniciales, ya que ambas condiciones están evaluadas en el mismo valor de la variable independiente, $x = 0$. Mientras que el segundo coresponde a uno de valores en la frontera, ya que las condiciones están evaluadas tanto en $x = 1$ y $x = 2$.*

Cabe señalar también, que en ocasiones pueden haber ecuaciones diferenciales que admitan soluciones que no posean el patrón dado por la solución general. Más precisamente:

Definición 10 (Solución singular de una ED) *Se le llama así a aquellas soluciones de la ED cuya forma difiere a la que posee la solución general. Se les llama también soluciones "extrañas" o "raras".*

Ejemplo 7 *Determine una solución singular para la ecuación*

$$y' = y^2 - 1$$

sabiendo que su solución general está dada por

$$y = \frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}$$

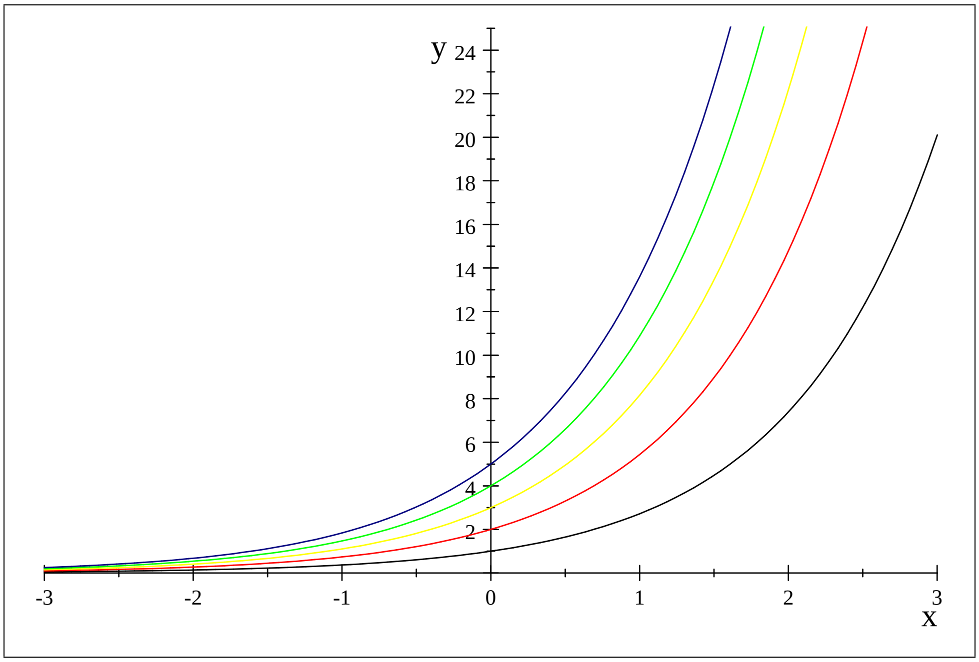
Solución 7 *Podemos notar que la función $y = -1$, es solución singular de esta ecuación, ya que la satisface pero no existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$-1 = \frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}$$

Definición 11 (Curva Integral) *Se le denomina así a la gráfica o curva de una solución de una ED.*

A continuación, se muestran varias curvas integrales de la ED

$$y' - y = 0$$



1.3 Tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden

1.3.1 Ecuaciones Diferenciales en variables separables y reducibles a ellas mediante cambio de variable

Ecuaciones Diferenciales en variables separables

Definición 12 (ED en variables separables) *Se le llama así a una EDO cuya forma es:*

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

lo cual equivale a:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y)\,dy &= f(x)\,dx \end{aligned}$$

Observe que esta ecuación involucra, inicialmente, funciones que dependen de una sola variable. Luego se separan de manera que en cada lado de la igualdad, resulten expresiones que sólo dependan de una de las variables presentes $(g(y)\,dy = f(x)\,dx)$. Seguidamente, se integra a ambos lados respecto a las variables correspondientes y de ser posible, se despeja la variable dependiente en términos de independiente y de la constante arbitraria que aparece luego de la integración. La solución puede expresarse también como una función definida implícitamente por la ecuación obtenida al resolver la ED original.

Ejemplo 8 *Resolver la ecuación diferencial en variables separables:*

$$y' = \frac{2t}{y + yt^2}$$

Solución 8 *Separamos las variables y resolvemos:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{2t}{y\left(1+t^2\right)} \\
ydy &= \frac{2tdt}{1+t^2} \\
\frac{y^2}{2} &= \ln\left(1+t^2\right)+C \\
y^2 &= 2\ln\left(1+t^2\right)+C \\
y &= \pm\sqrt{2\ln\left(1+t^2\right)+C}
\end{aligned}$$

Observe que expresamos C en vez de $2C$, ya que la constante arbitraria "absorbe" a otras constantes a la hora de efectuar una operación entre ellas.

Ejemplo 9 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$x^2\left(1+y^2\right)dx+2xdy=0$$

Solución 9 *Al separar las variables y resolver, obtenemos:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{1+y^2} &= \frac{-xdx}{2} \\
\arctan(y) &= \frac{-x^2}{4}+C \\
y &= \tan\left(\frac{-x^2}{4}+C\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 10 *Resuelva el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+xy^2}{4y} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Solución 10 *Resolviendo primero la ecuación, tenemos que:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x+xy^2}{4y} \\
\frac{4ydy}{1+y^2} &= xdx \\
2\ln\left(1+y^2\right) &= \frac{x^2}{2}+C \\
\ln\left(1+y^2\right) &= \frac{x^2}{4}+C \\
1+y^2 &= e^{\frac{x^2}{4}+C} \\
y^2 &= Ce^{\frac{x^2}{4}}-1
\end{aligned}$$

Ahora para hallar el valor de la constante C, como se debe cumplir que $y(0) = 1$, sustituimos $x = 0$ y $y = 1$ en este último resultado y así obtenemos:

$$1 = Ce^0 - 1$$

De donde $C = 2$ y así, la solución buscada es:

$$y^2 = 2e^{\frac{x^2}{4}} - 1$$

Ejemplo 11 *Halle la solución de la ecuación diferencial:*

$$\sin^2(y)\,dx + \cos^2(x)\,dy = 0$$

la cual cumple la condición $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

Solución 11 *Al resolver primeramente la EDO por medio de variables separables, concluimos que:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{\sin^2(y)} &= -\frac{dx}{\cos^2(x)} \\
\csc^2(y)\,dy &= -\sec^2(x)\,dx \\
-\cot(y) &= -\tan(x) + C \\
\cot(y) &= \tan(x) + C
\end{aligned}$$

Posteriormente, al sustituir los valores dados en la condición inicial $(x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4})$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + C \\
1 &= 1 + C
\end{aligned}$$

De donde $C = 0$ y así:

$$\begin{aligned}
\cot(y) &= \tan(x) \\
y &= \operatorname{arccot}(\tan(x))
\end{aligned}$$

Ecuaciones reducibles a variables separables. Cambio de variable. Es natural preguntarse si las ecuaciones diferenciales se pueden resolver todas mediantes la separación de variables. Evidentemente no esto es así. Sin embargo, existen ecuaciones diferenciales que, aunque originalmente no poseen variables separables, pueden convertirse en una de éstas últimas mediante un cambio de variable. Mostremos esto con algunos ejemplos.

Ejemplo 12 *Muestre que la sustitución* $z = ax + by + c$ *transforma la ecuación diferencial*

$$y' = f(ax + by + c)$$

en una ecuación de variables separables. Use esto para resolver la ecuación $y' = (x + y)^2$.

Solución 12 *Primeramente, derivamos* z *con respecto a* x *y de ahí despejamos* y' :

$$z' = a + by'$$

De donde:

$$y'=\frac{z'-a}{b}$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{z'-a}{b} &= f(z) \\
z'-a &= bf(z) \\
z' &= bf(z)+a \\
\frac{z'}{bf(z)+a} &= 1 \\
\frac{dz}{bf(z)+a} &= dx \qquad (\blacktriangle)
\end{aligned}$$

Esto último porque $z'=\dfrac{dz}{dx}$. *Se ve entonces que esta ecuación se convierte en una de variables separables. Ahora, aplicando este método a la ecuación* $y'=(x+y)^2$, *tenemos que* $z=x+y$.*(Es decir,* $a=1$ *y* $b=1$*). Derivando respecto a* x *obtenemos*

$$z'=1+y'$$

Entonces, al sustituir en $(\blacktriangle)$, *se deduce que:*

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{z^2+1} &= dx \\
\int\frac{dz}{z^2+1} &= \int dx \\
\arctan(z) &= x+C \\
z &= \tan(x+C) \\
x+y &= \tan(x+C) \\
y &= \tan(x+C)-x
\end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas y reducibles a ellas. Un tipo especial de ecuación diferencial reducible a una de variables separables es la ecuación diferencial homogénea. Para entender el significado de esta ecuación, necesitamos primero la siguiente definición:

Definición 13 (Funciones homogéneas) *Una función* $f(x,y)$ *es homogénea de grado* n *en sus argumentos, si satisface la identidad:*

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$$

Ejemplo 13 *Determine cuáles de las siguientes funciones son homogéneas:*

$$1.f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{y^2} \qquad 2.f(x,y)=\frac{3x^2y+y^3}{xy+x^2} \qquad 3.f(x,y)=\frac{xy+1}{y^2}$$

Solución 13 *Analizamos cada caso por separado:*

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{y^2}$:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(ty)^2} \\ &= \frac{t^2x^2 - t^2y^2}{t^2y^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{y^2} \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

   Es decir, que $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

2. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y + y^3}{xy + x^2}$:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \frac{3\,(tx)^2 \cdot ty + (ty)^3}{tx \cdot ty + (tx)^2} \\ &= \frac{3t^3x^2y + t^3y^3}{t^2xy + t^2x^2} \\ &= t \cdot \frac{3x^2y + y^3}{xy + x^2} \\ &= t \cdot f(x,y) \end{aligned}$$

   Lo cual nos dice que $f(x,y)$ es homogénea de grado 1.

3. $f(x,y) = \dfrac{xy + 1}{y^2}$:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \frac{tx \cdot ty + 1}{(ty)^2} \\ &= \frac{t^2xy + 1}{t^2y^2} \end{aligned}$$

   Sin embargo, en esta última expresión, no es posible obtener como factor común a t^2 y consecuencuentemente, no se puede simplicar dicho factor, por lo que la función dada no es homogénea.

Definición 14 (Ecuación Diferencial Homogénea) *Una ecuación diferencial de la forma:*

$$y' = f(x,y)$$

se denomina homogénea si $f(x,y)$ *es homogénea de grado* 0.

Importante 2 *Por ahora, cuando hablemos de ecuación diferencial homogénea, haremos referencia a la definición anterior. Más adelante, veremos que también se le llama "ecuaciones diferenciales homogéneas" a aquellas donde la expresión que involucra a la variable independiente, la función incógnita y sus derivadas, se iguala a* 0. *Sin embargo, más adelante haremos uso de esta connotación.*

Retomando el planteamiento recién introducido, una ecuación homogénea puede ser escrita de la forma:

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \bigstar$$

Si a esta ecuación, le aplicamos el cambio de variable $u = \dfrac{y}{x}$, derivando respecto a x obtenemos:

$$u' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

De esta expresión despejamos y', de manera que la ecuación diferencial se transforma en una de variables u y x. Note que como $y = ux$, entonces:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{y'x - ux}{x^2} \\ u' &= \frac{y' - u}{x} \end{aligned}$$

De donde se concluye que:

$$y' = u'x + u$$

De manera que al sustituir esto en la ecuación $(\bigstar)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} u'x + u &= \phi(u) \\ u'x &= \phi(u) - u \\ x\frac{du}{dx} &= \phi(u) - u \\ \frac{du}{\phi(u) - u} &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

La cual corresponde a una ecuación en variables separables y que ya sabemos resolver.

Importante 3 *Una forma de averiguar si la ecuación $y' = f(x, y)$ es homogénea, es viendo que los grados de todos términos de $f(x, y)$ sean iguales. Otra manera es viendo que en la ecuación diferencial esté presenten las expresiones $\dfrac{y}{x}$ ó $\dfrac{x}{y}$ en uno o varias de sus términos.*

Ejemplo 14 *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:* $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

Solución 14 *Claramente corresponde a una ED homogénea. Hacemos $u = \dfrac{y}{x}$, lo que equivale a $y = ux$, de donde $y' = u'x + u$ y sustituyendo esto en la ecuación, obtenemos:*

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{2ux^2}{3x^2 - u^2x^2} \\ u'x + u &= \frac{2u}{3 - u^2} \\ u'x &= \frac{2u}{3 - u^2} - u \\ u'x &= \frac{2u - 3u + u^3}{3 - u^2} \\ u'x &= \frac{u^3 - u}{3 - u^2} \end{aligned}$$

De esta última ecuación, factorizando el numerador y aplicando variables separables, obtenemos:

$$\frac{3-u^2}{u(u+1)(u-1)}du=\frac{dx}{x}$$

Integrando por fracciones parciales y simplificando:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3-u^2}{u(u+1)(u-1)}du &= \int \frac{dx}{x} \\
\int \left(\frac{-3}{u}+\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u-1}\right)du &= \int \frac{dx}{x} \\
-3\ln(u)+\ln(u+1)+\ln(u-1) &= \ln(x)+C \\
\ln\left(\frac{(u+1)(u-1)}{u^3}\right) &= \ln(x)+C \\
e^{\ln\left(\frac{(u+1)(u-1)}{u^3}\right)} &= e^{\ln(x)+C} \\
\frac{(u+1)(u-1)}{u^3} &= Cx \\
\frac{u^2-1}{u^3} &= Cx \\
\frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{\frac{y^3}{x^3}} &= Cx \\
\frac{x(y^2-x^2)}{y^3} &= Cx \\
y^2-x^2 &= Cy^3
\end{aligned}$$

Ejemplo 15 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$xy' = y+\sqrt{y^2-x^2} \qquad x>0$$

Solución 15 *Claramente corresponde a una EDO homogénea, al hacer el cambio de variable* $u=\frac{y}{x}$, *obtenemos* $y' = \acute{u}x+u$ *y* $y=ux$. *Con esto:*

$$\begin{aligned}
x\left(u'x+u\right) &= ux+\sqrt{u^2x^2-x^2} \\
x\left(u'x+u\right) &= ux+x\sqrt{u^2-1} \\
u'x+u &= u+\sqrt{u^2-1} \\
x\frac{du}{dx} &= \sqrt{u^2-1} \\
\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} &= \frac{dx}{x} \\
\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right) &= \ln(x)+C \\
u+\sqrt{u^2-1} &= Cx \\
\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1} &= Cx
\end{aligned}$$

Ecuaciones Diferenciales Reducibles a Homogéneas Las ecuaciones diferenciales del tipo:

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \qquad \clubsuit$$

se reducen a homogéneas, siguiendo el procedimiento que se detalla a continuación:

Caso 1 *Si las rectas:*

$$l_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \text{ y } l_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

se intersecan en el punto (x_0, y_0), *entonces hacemos:*

$$\begin{aligned} x &= X + x_0 \\ y &= Y + y_0 \end{aligned}$$

De esta forma, al sustituir en $\clubsuit$, *la ecuación resultante es:*

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right)$$

la cual es homogénea y se resuelve como ya vimos.

Caso 2 *Si las rectas:*

$$l_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{ y } \quad l_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

son paralelas, entonces se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$$

con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{\lambda (a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \end{aligned}$$

Con lo cual, hacemos $z = a_2 x + b_2 y$. *Derivando a ambos lados de esto, tenemos:*

$$z' = a_2 + b_2 y'$$

y la ecuación resultante es de variables separables.

A continuación veremos algunos ejemplos de estas ecuaciones:

Ejemplo 16 *Resuelva la ecuación diferencial:*

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - y + 3}$$

Solución 16 *Resovemos primero el sistema:*

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

De donde se obtiene $x = -2$ *y* $y = 1$. *Así: al hacer:*

$$\begin{aligned} X &= x + 2 \\ Y &= y - 1 \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos la ecuación homogénea:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + Y}{X - Y}$$

Al hacer $Y = UX$, *tenemos* $Y' = U'X + U$. *As*

$$
\begin{aligned}
U'X + U &= \frac{X + UX}{X - UX} \\
U'X + U &= \frac{1 + U}{1 - U} \\
U'X &= \frac{1 + U}{1 - U} - U \\
X\frac{dU}{dX} &= \frac{1 + U^2}{1 - U} \\
\frac{(1 - U)\,dU}{1 + U^2} &= \frac{dX}{X} \\
\arctan(U) - \frac{\ln\left(1 + U^2\right)}{2} &= \ln(X) + C \\
\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) - \frac{\ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right)}{2} &= \ln(X) + C \\
\arctan\left(\frac{y-1}{x+2}\right) - \frac{\ln\left(1 + \frac{(y-1)^2}{(x+2)^2}\right)}{2} &= \ln(x+2) + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 17 *Resuelva la ecuación diferencial:*

$$(x + y)\,dx + (x + y - 1)\,dy = 0$$

Solución 17 *Observe que la ecuación anterior es equivalente a:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x + y - 1}$$

De acá podemos tomar

$$z = x + y$$

con lo cual

$$z' = 1 + y'$$

y entonces

$$y' = z' - 1$$

Así, al sustituir en la ecuación original y simplificar, tenemos:

$$\begin{aligned} z'-1 &= \frac{-z}{z-1} \\ z' &= \frac{-z}{z-1}+1 \\ z' &= \frac{-1}{z-1} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{-1}{z-1} \\ (z-1)\,dz &= -dx \\ \frac{z^2}{2}-z &= -x+C \\ \frac{(x+y)^2}{2}-x-y &= -x+C \\ \frac{(x+y)^2}{2}-y &= C \end{aligned}$$

Otra de las ecuaciones que se pueden reducir a una ED homogénea, es aquella de la forma

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

donde los términos de P y Q no poseen todos el mismo grado. La ecuación:se convertirá en homogénea si hacemos la sustitución:

$$y=z^{\alpha}$$

Con lo que tenemos:

$$dy=\alpha z^{\alpha-1}dz$$

Ejemplo 18 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$y^3dx+2\left(x^2-xy^2\right)dy=0$$

Solución 18 *Haciendo el cambio de variable sugerido anteriormente, tenemos que:*

$$\begin{aligned} z^{3\alpha}dx+2\left(x^2-x\cdot z^{2\alpha}\right)\alpha z^{\alpha-1}dz &= 0 \\ z^{3\alpha}dx+2\left(\alpha x^2\cdot z^{\alpha-1}-\alpha x\cdot z^{3\alpha-1}\right)dz &= 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$3\alpha=\alpha+1$$

Y de ahí se deduce que $\alpha=\dfrac{1}{2}$ *y así* $y=z^{\frac{1}{2}}$. *De esta manera, al sustituir en la última ecuación obtenida y multiplicar por* $z^{\frac{1}{2}}$, *se obtiene:*

$$\begin{aligned} z^{\frac{3}{2}}dx+2\left(\frac{1}{2}x^2z^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{2}xz^{\frac{1}{2}}\right)dz &= 0 \\ z^{\frac{3}{2}}dx+\left(x^2z^{\frac{-1}{2}}-xz^{\frac{1}{2}}\right)dz &= 0 \\ z^2dx+\left(x^2-xz\right)dz &= 0 \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{-z^2}{x^2-xz} \end{aligned}$$

Al hacer la sustitución $z = ux$, se deduce que $z' = u'x + u$ y así:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{-z^2}{x^2 - xz} \\
u'x + u &= \frac{-u^2x^2}{x^2 - ux^2} \\
u'x + u &= \frac{-u^2}{1-u} \\
u'x &= \frac{-u^2}{1-u} - u \\
u'x &= \frac{-u}{1-u} \\
x\frac{du}{dx} &= \frac{-u}{1-u} \\
\frac{(u-1)\,du}{u} &= \frac{dx}{x} \\
u - \ln(u) &= \ln(x) + C \\
\frac{e^u}{u} &= Cx \\
\frac{e^{\frac{z}{x}}}{\frac{z}{x}} &= Cx \\
\frac{xe^{\frac{y^2}{x}}}{y^2} &= Cx \\
e^{\frac{y^2}{x}} &= Cy^2
\end{aligned}$$

1.3.2 Ecuaciones diferenciales exactas y reducibles a ellas.

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 15 (Ecuación diferencial exacta) *Se le llama así a la ecuación de la forma:*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

si se cumple que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La solución de esta ecuación está dada por:

$$C = \phi(x,y) = \int M(x,y)dx$$

o bien por:

$$C = \phi(x,y) = \int N(x,y)dy$$

Cabe destacar que, según lo planteado, se cumple que:

$$\phi_x = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \phi_y = N(x,y)$$

Además, a la hora de efectuar las integrales señaladas anteriormente, al constante de integración no corresponde a una constante numérica, sino a una función que depende de la otra variable y que dicha función debe ser determinada, derivando la función ϕ respecto a la variable contraria a la empleada en la integración y luego, igualar el resultado con $M(x, y)$ o $N(x, y)$, según corresponda, a fin de determinar la función correspondiente a la constante. Los siguientes ejemplos ilustran mejor lo planteado en estas líneas:

Ejemplo 19 *Resuelva la ecuación diferencial*

$$(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$$

Solución 19 *Verifiquemos primero que corresponde a una ecuación diferencial exacta. Primeramente, observe que*

$$M(x, y) = 3x^2 - 2x - y \qquad y \qquad N(x, y) = 2y - x + 3y^2$$

con lo cual:

$$M_y = -1 \qquad y \qquad N_x = -1$$

Entonces la ecuación es, efectivamente, una ED exacta. Ahora, integramos $M(x, y)$ respecto a x, derivamos respecto a y y comparamos con $N(x, y)$ para igualar términos y hallar la solución general:

$$\phi(x, y) = C = \int (3x^2 - 2x - y)dx = x^3 - x^2 - xy + h(y) \qquad (\spadesuit)$$

Derivando respecto a y lo obtenido, tenemos

$$\phi_y = -x + h'(y)$$

pero recordemos que $\phi_y = N(x, y)$ y

$$N(x, y) = 2y - x + 3y^2$$

Por tanto, se deduce que

$$h'(y) = 2y + 3y^2$$

De esta manera

$$h(y) = y^2 + y^3$$

y con ello, sustituimos en el resultado obtenido en ($\spadesuit$) para concluir que:

$$\phi(x, y) = C = x^3 - x^2 - xy + y^2 + y^3$$

Usted puede comprobar que se concluye el mismo resultado, si se integra primero $N(x, y)$ respecto a y, se compara con $M(x, y)$, se determina la función $g'(x)$ y luego se integra para concluir el resultado.

Otra manera en que una ecuación exacta puede ser resuelta, consiste en hacer

$$\begin{cases} C = \phi(x, y) = \int M(x, y)\, dy = G(y) + H(x, y) + f(x) \\ C = \phi(x, y) = \int N(x, y)\, dx = F(x) + H(x, y) + g(y) \end{cases}$$

Y entonces, al igualar término a término, obtendremos que $F(x) = f(x)$ y $G(y) = g(y)$. Se obtiene finalmente la solución de la forma

$$C = \phi(x, y) = H(x, y) + f(x) + g(y)$$

Ejemplo 20 *Resuelva el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} (3y + e^x)dx + (3x + \cos(y))dy = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Solución 20 *Fácilmente se deduce que es una ecuación exacta, ya que* $M(x,y) = 3y + e^x$ *y* $N(x,y) = 3x + \cos(y)$, *de donde:*

$$M_y = 3 \qquad y \qquad N_x = 3$$

Ahora, para obtener la solución de la ecuación, hacemos:

$$\begin{aligned} C &= \phi(x,y) = \int (3y + e^x)\, dx = 3xy + e^x + g(y) \\ C &= \phi(x,y) = \int (3x + \cos(y))\, dy = 3xy + \sin(y) + f(x) \end{aligned}$$

De esto último se puede deducir que $f(x) = e^x$ *y* $g(y) = \sin(y)$, *con lo cual:*

$$C = \phi(x,y) = 3xy + e^x + \sin(y)$$

La cual es la solución de la ecuación diferencial. Ahora para determinar el valor de C, *observe que* $x = 0$ *y* $y = 0$, *de donde al sustituir en lo anterior se concluye que* $C = 1$, *de manera que la solución al problema de valor inicial es:*

$$1 = 3xy + e^x + \sin(y)$$

Ecuaciones reducibles a exactas Cabe resaltar que NO todas las ecuaciones de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (✠)$$

son exactas. Sin embargo, se pueden resolver aquellas a las que se les puede multiplicar por una función $\phi = z(x,y)$ llamada factor integrante, lo cual da como resultado que la ecuación:

$$\underbrace{\phi M(x,y)}_{M^*(x,y)}dx + \underbrace{\phi N(x,y)}_{N^*(x,y)}dy = 0$$

SI es exacta y se puede resolver como vimos líneas atras. Esto último quiere decir que

$$M_y^* = N_x^*$$

Es decir

$$\begin{aligned} z_y M + \phi M_y &= z_x N + \phi N_x \\ \phi M_y - \phi N_x &= z_x N - z_y M \\ \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M} &= \frac{1}{\phi} \\ \int \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M} dz &= \ln(\phi) \\ e^{\int \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M} dz} &= \phi \end{aligned}$$

De esto último, se desprenden 3 probables:

Caso 3 *Si* ϕ *es sólamente función de* x, *la expresión* $C(z) = \dfrac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M}$ *se reduce a* $A(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N(x,y)}$, *que depende sólo de* x. *Entonces:*

$$\phi(x,y) = e^{\int A(x)dx}$$

es un factor integrante de la ecuación ✠.

Caso 4 *Si* ϕ *es sólamente función de* y*, la expresión* $C(z) = \dfrac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M}$ *se reduce a* $B(y) = \dfrac{N_x - M_y}{M(x,y)}$*, que depende sólo de* y*. Entonces:*

$$\phi(x,y) = e^{\int B(y)dy}$$

es un factor integrante de la ecuación ✠*.*

Caso 5 *Si la expresión* $C(z) = \dfrac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M}$ *depende tanto de* x *como de* y*, es decir, si* $z = f(x,y)$ *entonces:*

$$\phi(x,y) = e^{\int C(z)dz}$$

es un factor integrante de la ecuación ✠*.*

Ejemplo 21 *Resuelva la ecuación diferencial* $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$ *si se sabe que tiene un factor integrante que sólo depende de* y*.*

Solución 21 *Como el factor integrante depende sólo de* y*, tenemos que* $\phi(y) = e^{\int \frac{N_x - My}{M(x,y)}dy}$*, entonces:*

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= e^{\int \frac{-3y^2-(4xy-9y^2)}{2xy^2-3y^3}dy} \\
&= e^{\int \frac{6y^2-4xy}{2xy^2-3y^3}dy} \\
&= e^{\int \frac{-2y(2x-3y)}{y^2(2x-3y)}dy} \\
&= e^{\int \frac{-2}{y}dy} \\
&= \frac{1}{y^2}
\end{aligned}$$

Ahora, multiplicando la ecuación original por el factor integrante, obtenemos que

$$(2x - 3y)dx + (\frac{7}{y^2} - 3x)dy = 0$$

Y así, ya es exacta. Ahora, integrando $M(x,y)$ *respecto a* x*, tenemos:*

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= C = \int (2x - 3y)dx \\
\phi(x,y) &= C = x^2 - 3xy + h(y)
\end{aligned}$$

Derivando respecto a y*, tenemos* $\phi_y = N(x,y) = -3x + h'(y)$ *pero* $N(x,y) = \dfrac{7}{y^2} - 3x$*, de donde* $h'(y) = \dfrac{7}{y^2}$ *y así* $h(y) = \dfrac{-7}{y}$*. Finalmente:*

$$\phi(x,y) = C = x^2 - 3xy - \frac{7}{y}$$

1.4 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Ecuaciones de Bernoulli y Riccatti.

1.4.1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas y no homogéneas

Definición 16 (Ecuación diferencial lineal de orden n) *Una ecuación de este tipo es aquella que se puede escribir de la forma:*

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\,y^{(n-2)} + ... + a_2(x)\,y^{''} + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = h(x)$$

donde a $h(x)$ se le llama la función externa y a la función $a_n(x)$, el coeficiente principal.

Definición 17 (Ecuación diferencial lineal de primer orden) *Es aquella ecuación diferencial lineal cuyo orden es 1. suele escribirse de la forma:*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

En el caso de que $q(x) = 0$, decimos que la ecuación es lineal, de primer orden y homogénea.

Importante 4 *Entendemos por homogénea en este caso, a la ecuación expresada de la forma $F(x, y, y') = 0$. NO debemos confundirla con la ecuación homogénea vista antes (aquella que tenía la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$)*

Para resolver esta ecuación veremos 2 casos:

Caso 6 *Si la ecuación es homogénea, podemos proceder como sigue:*

$$\begin{aligned}
y' + p(x)y &= 0 \\
y' &= -p(x)y \\
\frac{y'}{y} &= -p(x) \qquad \textit{(Variables separables)} \\
\ln y &= -\int p(x)dx + C \\
y &= Ce^{-\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

Y así en este último paso habremos obtenidos la solución.

Ejemplo 22 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$y' - 2xy = 0$$

Solución 22 *Al ser una ecuación lineal homogénea, con $p(x) = -2x$, la solución está dada por:*

$$\begin{aligned}
y &= Ce^{-\int p(x)dx} \\
&= Ce^{-\int -2xdx} \\
&= Ce^{x^2}
\end{aligned}$$

Caso 7 *Si la ecuación NO es homogénea, calculamos la expresión $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, que llamaremos Factor Integrante. NO se debe confundir con el Factor Integrante que vimos para las ecuaciones exactas; se llaman igual pero actúan diferente. El primer tiene como objetivo convertir una ecuación diferencial no exacta en otra que, sí lo es, mientras que éste nuevo Factor Integrante tiene la función de convertir uno de los* *lados de la ecuación (el que tiene a $y' + p(x)y$), en la derivada del producto de dicho Factor Integrante y la función incógnita. Más precisamente:*

$$
\begin{aligned}
y' + p(x)y &= q(x) \\
e^{\int p(x)dx}\left(y' + p(x)y\right) &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\
\underbrace{e^{\int p(x)dx}y' + p(x)e^{\int p(x)dx}y}_{Derivada\ de\ e^{\int p(x)dx}y} &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\
\frac{d\left(e^{\int p(x)dx}y\right)}{dx} &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\
e^{\int p(x)dx}y &= \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx \\
y &= e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx
\end{aligned}
$$

Con lo cual obtenemos la solución de la ecuación diferencial en estudio.

Ejemplo 23 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$y' + 2xy = x$$

Solución 23 *El factor integrante está dado por:*

$$
\begin{aligned}
\mu(x) &= e^{\int 2xdx} \\
&= e^{x^2}
\end{aligned}
$$

Multiplicamos por esta expresión a ambos lados de la ecuación y resolvemos:

$$
\begin{aligned}
y' + 2xy &= x \\
e^{x^2}\left(y' + 2xy\right) &= xe^{x^2} \\
e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y &= xe^{x^2} \\
\frac{d\left(e^{x^2}y\right)}{dx} &= xe^{x^2} \\
e^{x^2}y &= \underbrace{\int xe^{x^2}}_{u=x^2,du=2xdx} \\
e^{x^2}y &= \frac{e^{x^2}}{2} + C \\
y &= e^{-x^2}\left(\frac{e^{x^2}}{2} + C\right) \\
y &= \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{x^2}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 24 *Resuelva la ecuación:*

$$y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$$

Solución 24 *El factor integrante corresponde a:*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\int \cos(x)dx}\\ &= e^{\sin(x)}\end{aligned}$$

Luego, resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
y' + y\cos(x) &= \sin(x)\cos(x)\\
e^{\sin(x)}\left(y' + y\cos(x)\right) &= e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\\
e^{\sin(x)}y' + ye^{\sin(x)}\cos(x) &= e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\\
\frac{d\left(e^{\sin(x)}y\right)}{dx} &= e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\\
e^{\sin(x)}y &= \underbrace{\int e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)\,dx}_{u=\sin(x),du=\cos(x)dx}\\
e^{\sin(x)}y &= \int ue^{u}du\\
e^{\sin(x)}y &= ue^{u} - e^{u} + C\\
e^{\sin(x)}y &= e^{\sin(x)}\sin(x) - e^{\sin(x)} + C\\
y &= \sin(x) - 1 + \frac{C}{e^{\sin(x)}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 25 *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:* $y' = \dfrac{1}{e^{y} - x}$.

Solución 25 *Primeramente, parece que la ecuación no tiene una forma conocida para ser resuelta en* y. *Pero note que:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^{y} - x}\\
&\implies \frac{dx}{dy} = e^{y} - x\\
&\implies \frac{dx}{dy} + x = e^{y}
\end{aligned}$$

Esta última ecuación es lineal no homogénea para x. *Resolviéndola, tenemos que* $\mu(y) = e^{\int dy} = e^{y}$. *De esta* *forma, multiplicando a ambos lados por este factor integrante se obtiene:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} + x &= e^y \\ \frac{dx}{dy}e^y + xe^y &= e^y \cdot e^y \\ \frac{d(xe^y)}{dy} &= e^{2y} \\ \int \frac{d(xe^y)}{dy} dy &= \int e^{2y} dy \\ xe^y &= \frac{e^{2y}}{2} + C \\ x &= \frac{e^y}{2} + \frac{C}{e^y} \end{aligned}$$

Con ello, la solución general es $x = \frac{e^y}{2} + \frac{C}{e^y}$.

1.4.2 Ecuaciones de Bernoulli y Riccatti.

Ecuaciones de Bernoulli.

Definición 18 (Ecuación de Bernoulli) *Son ecuaciones de primer orden, cuya forma es:*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

con $n \neq 0$ *y* $n \neq 1$.

Estas ecuaciones pueden reducirse a ecuaciones lineales de primer grado como las vistas anteriormente, por medio del cambio de variables:

$$z = y^{1-n}$$

Seguido a esto, se deriva a ambos lados respecto a x para obtener:

$$z' = (1-n)\, y^{-n} y'$$

De donde se despeja y'. La ecuación lineal de primer orden no homogénea resultante queda en términos de z y x, la cual se resuelve por le método ya estudiado. A continuación algunos ejemplos de ecuaciones de este tipo.

Ejemplo 26 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$xy' + y = y^2 \ln(x)$$

Solución 26 *Claramente, esta ecuación corresponde a una de Bernoulli, con* $n = 2$, *ya que al dividir por* x, *obtenemos:*

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \ln(x)}{x}$$

Aplicando el cambio de variable:

$$z = y^{1-2} = y^{-1}$$

Se obtiene al derivar:

$$z' = \frac{-y'}{y^2}$$

Pero como $z = y^{-1}$, *entonces* $y = \frac{1}{z}$, *por lo que al despejar* y' *de lo anterior, concluimos que:*

$$\frac{-z'}{z^2} = y'$$

Ahora, al sustituir esto en la ecuación diferencial, se deduce que:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{y}{x} &= \frac{y^2 \ln(x)}{x} \\
\frac{-z'}{z^2} + \frac{1}{zx} &= \frac{\ln(x)}{z^2 x} \\
z' - \frac{z}{x} &= \frac{-\ln(x)}{x} \qquad \textit{(Multiplicando por } -z^2\textit{)}
\end{aligned}$$

Esta última ecuación es lineal de primer orden no homogénea, como se esperaba. Esta ecuación tiene por factor integrante a $\mu(x) = e^{\int \frac{-dx}{x}} = \frac{1}{x}$. *Entonces, multiplicamos por este factor integrante y resolvemos:*

$$\begin{aligned}
z' - \frac{z}{x} &= \frac{-\ln(x)}{x} \\
\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} &= \frac{-\ln(x)}{x^2} \\
\frac{d\left(\frac{z}{x}\right)}{dx} &= \frac{-\ln(x)}{x^2} \\
\frac{z}{x} &= - \underbrace{\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx}_{\substack{u = \ln(x),\, dv = \frac{-1}{x^2} \\ du = \frac{dx}{x},\, v = \frac{1}{x}}} \\
\frac{z}{x} &= \frac{\ln(x)}{x} - \int \frac{dx}{x^2} \\
\frac{z}{x} &= \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + C \\
z &= \ln(x) + 1 + Cx \qquad \textit{pero como } z = \frac{1}{y} \\
\frac{1}{y} &= \ln(x) + 1 + Cx \\
y &= \frac{1}{\ln(x) + 1 + Cx}
\end{aligned}$$

Ejemplo 27 *Resuelva la ecuación* $x' = \dfrac{x^2}{3y^4 + 2xy}$.

Solución 27 *Expresada en esta forma, la ecuación no tiene aspecto de alguna de las ya estudiadas previamente, pero note que si invertimos las expresiones, obtenemos una ecuación de Bernoulli para las variables* x, y *y* y' :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{3y^4 + 2xy} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y^4 + 2xy}{x^2}$$

Ahora, resolvemos la ecuación obtenida.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{3y^4 + 2xy}{x^2} \\
y' &= \frac{3y^4}{x^2} + \frac{2y}{x}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{y' - \frac{2y}{x} = \frac{3y^4}{x^2}}_{\textit{Ecuación de Bernoulli}}$$

Para esta ecuación de Bernoulli, hacemos $z = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$*, de donde* $z' = -3y^{-4}y' = \frac{-3y'}{y^4}$ *y así* $\frac{-z'}{3} = \frac{y'}{y^4}$. *Además, si dividimos por* y^4 *en la última ecuación diferencial, sustituimos lo anterior y simplificamos, obtenemos una ED lineal de primer orden no homogénea:*

$$\begin{aligned} y' - \frac{2y}{x} &= \frac{3y^4}{x^2} \\ \frac{y'}{y^4} - \frac{2}{xy^3} &= \frac{3}{x^2} \\ \frac{-z'}{3} - \frac{2z}{x} &= \frac{3}{x^2} \\ z' + \frac{6z}{x} &= -\frac{9}{x^2} \end{aligned}$$

El factor integrante corresponde a $\mu(x) = e^{\int \frac{6dx}{x}} = x^6$. *Procedemos a multiplicar dicho factor a ambos lados de la ecuación y hallar la solcuión general:*

$$\begin{aligned} z' + \frac{6z}{x} &= -\frac{9}{x^2} \\ x^6\left(z' + \frac{6z}{x}\right) &= -x^6 \cdot \frac{9}{x^2} \\ z'x^6 + 6x^5z &= -9x^4 \\ \frac{d(zx^6)}{dx} &= -9x^4 \\ \int \frac{d(zx^6)}{dx}dx &= \int -9x^4dx \\ zx^6 &= \frac{-9x^5}{5} + C \\ z &= \frac{-9x^5}{5x^6} + \frac{C}{x^6} \\ z &= \frac{-9}{5x} + \frac{C}{x^6} \\ \frac{1}{y^3} &= \frac{-9}{5x} + \frac{C}{x^6} \\ \frac{1}{y^3} &= \frac{-9x^5 + C}{5x^6} \\ y^3 &= \frac{5x^6}{C - 9x^5} \end{aligned}$$

Y esta última corresponde a la solución general de la ecuación dada inicialmente.

Ecuaciones de Riccati.

Definición 19 (Ecuación diferencial de Riccati) *Es aquella ecuación diferencial de primer orden, de la forma:*

$$y' + q(x)y + p(x)y^2 = r(x)$$

Es una generalización de las ecuaciones lineales de primer orden y Bernoulli, si $p(x) = 0$ *o* $q(x) = 0$*, respectivamente.*

Para la solución de esta ecuación diferencial, necesitamos hallar o conocer una solución de la ecuación dada, la cual llamaremos $\phi(x)$. Luego, hacemos:

$$y = \phi(x) + \frac{1}{z}$$

con $z = z(x)$. De manera que:

$$y' = \phi'(x) - \frac{z'}{z^2}$$

y susituyendo en la ecuación original, reducimos todo a una ecuación lineal de primer orden no homogénea, la cual ya es sabido cómo resolver.

Ejemplo 28 *Resuelva la ecuación de Ricatti $y' - y^2 + 2xy = x^2$, sabiendo que $\phi(x) = x + 1$ es solución de dicha ecuación.*

Solución 28 *En este caso, por ser una ecuación de Ricatti, hacemos el cambio $y = \phi + \frac{1}{z}$, de manera que $y = x + 1 + \frac{1}{z}$ y así $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$. Con ello, si sustituimos en la ecuación diferencial original, tenemos que:*

$$\begin{aligned}
y' - y^2 + 2xy &= x^2 \\
1 - \frac{z'}{z^2} - (x + 1 + \frac{1}{z})^2 + 2x(x + 1 + \frac{1}{z}) &= x^2 \\
1 - \frac{z'}{z^2} - (x^2 + 1 + \frac{1}{z^2} + 2x + \frac{2x}{z} + \frac{2}{z}) + 2x^2 + 2x + \frac{2x}{z} &= x^2 \\
1 - \frac{z'}{z^2} - x^2 - 1 - \frac{1}{z^2} - 2x - \frac{2x}{z} - \frac{2}{z} + 2x^2 + 2x + \frac{2x}{z} &= x^2 \\
\frac{-z'}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + x^2 &= x^2 \\
\frac{-z'}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} &= 0 \\
z' + 1 + 2z &= 0 \\
z' + 2z &= -1
\end{aligned}$$

Ésta última ecuación (la cual es lineal de primer orden, no homogénea) se obtuvo al multiplicar por $-z^2$ a ambos lados de la igualdad. Ahora, el factor el integrante corresponde a $\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$. Multiplicamos *ambos de la ED por esta expresión y resolvemos:*

$$\begin{aligned}
z' + 2z &= -1 \\
e^{2x}\left(z' + 2z\right) &= -e^{2x} \\
z'e^{2x} + 2e^{2x}z &= -e^{2x} \\
\frac{d(ze^{2x})}{dx} &= -e^{2x} \\
\int \frac{d(ze^{2x})}{dx}dx &= \int -e^{2x}dx \\
ze^{2x} &= \frac{-e^{2x}}{2} + C \\
z &= \frac{-1}{2} + \frac{C}{e^{2x}} \\
\frac{1}{y-x-1} &= \frac{-1}{2} + \frac{C}{e^{2x}} \\
\frac{1}{y-x-1} &= \frac{-e^{2x}+C}{2e^{2x}} \\
y-x-1 &= \frac{2e^{2x}}{-e^{2x}+C} \\
y &= \frac{2e^{2x}}{-e^{2x}+C} + x + 1
\end{aligned}$$

Ya que del cambio de variable, se obtiene que $z = \dfrac{1}{y-x-1}$*. Con ello, hemos hallado la solución general de la ED original.*

1.4.3 Ecuaciones de segundo grado con variable ausente.

Veremos un par de casos de ecuaciones de segundo grado que no presentan algunas de las variables.

Caso 8 (Ecuación del tipo $f(y'', y', x) = 0$**)** *Acá la variable ausente es* y*. Para este caso hacemos:*

$$y' = v$$

Donde v *es claramente función de* x*, además es claro que:*

$$y'' = v'$$

y consecuentemente obtenemos una EDO lineal de primer orden.

Ejemplo 29 *Resolver la ecuación diferencial* $y'' + \frac{y'}{x} = x$

Solución 29 *Al hacer los cambios indicados líneas atrás, obtenemos:*

$$v' + \frac{v}{x} = x$$

El factor integrante de esta ecuación diferencial es $\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$, *de donde:*

$$\begin{aligned}
v' + \frac{v}{x} &= x \\
v'x + v &= x^2 \\
\frac{d(vx)}{dx} &= x^2 \\
vx &= \frac{x^3}{3} + C \\
v &= \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x} \\
y' &= \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x} \\
y &= \frac{x^3}{9} + C\ln(x) + D
\end{aligned}$$

Caso 9 (Ecuación del tipo $f(y'', y', y) = 0$) *En este caso, la variable x no está presente en la ecuación, mas la función como las derivadas presentes, dependen de x, por lo que para resolverla, hacemos:*

$$y' = v$$

Claramente se tiene que:

$$y'' = v'$$

Pero también, se tiene que:

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'=v} = v'(y) \cdot v$$

Por lo tanto:

$$y'' = v'(y) \cdot v$$

Con esto la ecuación se convierte en una de variables separables, de variable independiente y y variable dependiente v.

Ejemplo 30 *Resolver el problema de valores iniciales:*

$$\left\{\begin{array}{c} y'' = 2yy' \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

Solución 30 *Según lo planteado anteriormente, tenemos:*

$$\begin{aligned}
v'(y) \cdot v &= 2yv \\
\frac{dv}{dy} &= 2y \\
dv &= 2ydy \\
v &= y^2 + C
\end{aligned}$$

Como $y'(0) = v(0) = 0,$ *además de que* $y(0) = 0,$ *se concluye que* $C = -1,$ *así:*

$$\begin{aligned}
v &= y^2 - 1 \\
y' &= y^2 - 1 \\
\frac{dy}{dx} &= y^2 - 1 \\
\frac{dy}{y^2 - 1} &= dx \\
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) &= x + C \\
\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{1}{2}} &= Ce^x \\
\frac{y-1}{y+1} &= Ce^{2x} \\
y - 1 &= Cye^{2x} + Ce^{2x} \\
y\left(1 - Ce^{2x}\right) &= 1 + Ce^{2x} \\
y &= \frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}
\end{aligned}$$

Y como $y(0) = -1,$ *se concluye que*

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1+C}{1-C} \\
1 - C &= 1 + C \\
C &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente se llega al resultado deseado:

$$y = 1$$

1.5 Teorema de existencia y unicidad.

Teorema 1 (Existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$**)** *Sea:*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \blacklozenge$$

una ecuación diferencial con $f(x,y)$ *definida en una región* D *del plano* xy *que contiene al punto* (x_0, y_0)*. Si se cumple que:*

- $f(x,y)$ es continua en D.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en D.

Entonces existe una única solución $y = \phi(x)$ al problema de valor inicial ♦.

Gráficamente se representa, en el plano xy, la curva integral que contiene al punto (x_0, y_0).

Ejemplo 31 *Determine la región del plano xy para la cual existe solución unica de la ecuación diferencial:*

$$y' = x^2 + y^2$$

en cada punto (x_0, y_0) de dicha región.

Solución 31 *Tenemos que:*

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

es continua en todo el plano xy. Así mismo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

también es continua en todo xy. En virtud del Teorema de existencia y unicidad, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y'(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene solución única para todo (x_0, y_0).

Ejemplo 32 *Determine la región del plano xy para la cual existe solución unica de la ecuación diferencial:*

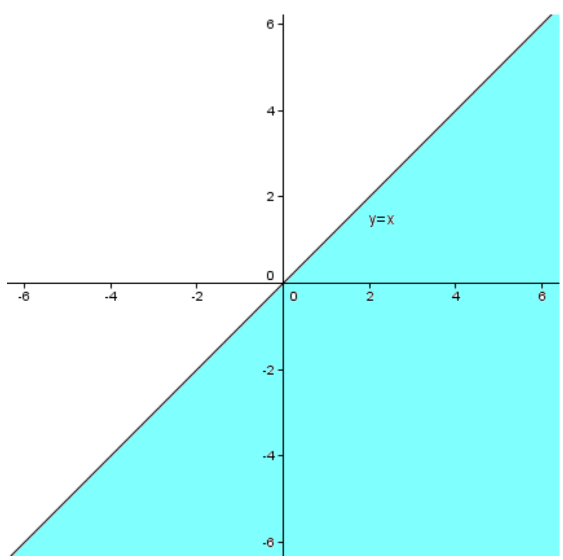
$$y' = \sqrt{x - y}$$

en cada punto (x_0, y_0) de dicha región.

Solución 32 *Para este caso, tenemos que:*

$$f(x, y) = \sqrt{x - y}$$

es continua siempre que $x - y \geq 0$, es decir, si $x \geq y$. En el plano se puede ver esta región así:



Por otra parte, podemos ver que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{x - y}}$$

Dicha derivada está definida siempre que $x > y$. Esta región es la misma obtenida antes, a excepción de la recta $y = x$. La región en común será entonces:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\right\}$$

Ejemplo 33 *Determine la región del plano xy para la cual existe solución unica de la ecuación diferencial:*

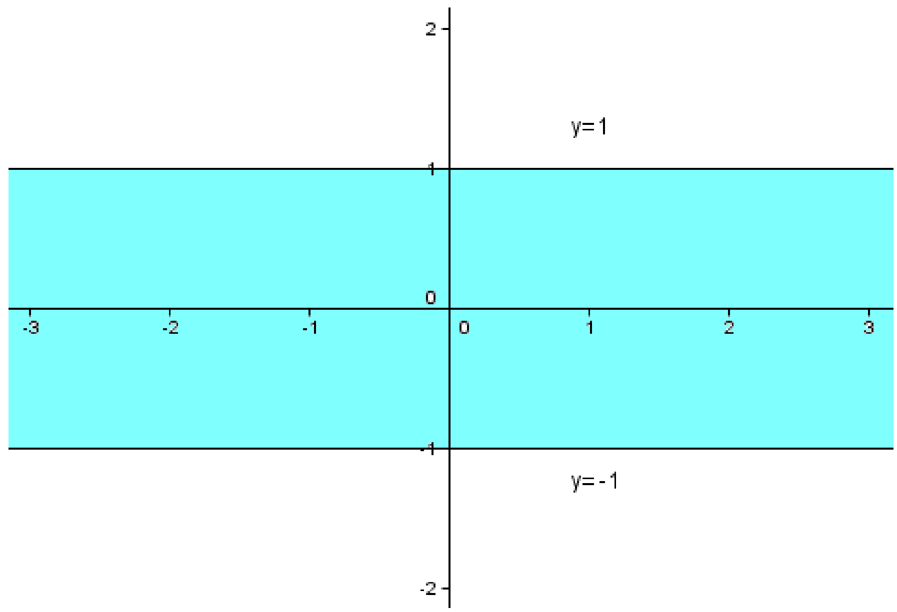
$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

en cada punto (x_0, y_0) de dicha región.

Solución 33 *Primeramente, note que:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$$

es continua para cualquier valor de x y para aquellos valores de y que cumplan la condición $1 - y^2 \geq 0$, es decir, si $y \in [-1, 1]$. Gráficamente:



Mientras que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

la cual existe y es continua siempre que $1 - y^2 > 0$, es decir:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 > y^2\right\}$$

1.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

1.6.1 Ecuación diferencial de una familia uniparamétrica de curvas.

Dada una familia uniparamétrica (o monoparamétrica) de curvas planas, cuya ecuación es:

$$y = \Phi(x, a)$$

con a siendo el parámetro (que a su vez, es constante), si derivamos respecto a x, obtenemos:

$$y' = \Phi_x(x, a)$$

Ahora, se elimina la constante a del sistema:

$$\begin{cases} y = \Phi(x, a) \\ y' = \Phi_x(x, a) \end{cases}$$

y así se obtiene una ecuación de la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

que, al despejar y', caracteriza a la familia:

$$y' = f(x, y)$$

Ejemplo 34 *Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas:*

$$y = ax^2$$

Solución 34 *Derivando respecto a x, tenemos que $y' = 2ax$, despejamos a del sistema:*

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y' = 2ax \end{cases}$$

De la segunda ecuación, se despeja a:

$$a = \frac{y'}{2x}$$

y sustituyendo en la ecuación $y = ax^2$, concluimos:

$$\begin{aligned} y &= \frac{y'}{2x} \cdot x^2 \\ &= \frac{xy'}{2} \end{aligned}$$

De donde:

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Ejemplo 35 *Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas:*

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$$

Solución 35 *Si derivamos respecto a x, obtenemos:*

$$\frac{2x}{a^2} - 2yy' = 0$$

Al despejar a de esta última ecuación, concluimos que:

$$a^2 = \frac{x}{yy'}$$

y sustituyendo esto en la ecuación original, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\frac{x}{yy'}} - y^2 &= 1 \\ xyy' - y^2 &= 1 \\ xyy' &= 1 + y^2 \\ y' &= \frac{1 + y^2}{xy} \end{aligned}$$

la cual es una ecuación de variables separables.

Ejemplo 36 *Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias con centro en el punto* $(a, 0)$ *y que contienen al origen*

Solución 36 *La familia está representada por la ecuación:*

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

De donde se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

Al derivar respecto a x*, se concluye que:*

$$2x + 2yy' = 2a$$

Así:

$$x + yy' = a$$

Con esto, sustituimos en la ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$ *para concluir que:*

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 2(x+yy')x \\
x^2 + y^2 &= 2x^2 + 2xyy' \\
y^2 - x^2 &= 2xyy' \\
\frac{y^2 - x^2}{2xy} &= y'
\end{aligned}$$

Note que esta última ecuación es homogénea.

1.6.2 Trayectorias ortogonales en coordenadas rectangulares

Definición 20 (Trayectorias ortogonales) *Sea:*

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad \checkmark$$

una familia de curvas planas, dependientes de un parámetro C*. Una trayectoria ortogonal a dicha familia es aquella curva plana tal que su tangente en cada uno de sus puntos de intersección con las curvas de la familia* ($\checkmark$)*, es perpendicular a las tangentes de estas curvas en los puntos mencionados.*

Definición 21 (Ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de una curva descrita por $F(x, y, y') = 0$**)** *La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas* $F(x, y, y') = 0$*, corresponde a:*

$$F\left(x, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0$$

Ejemplo 37 *Halle las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias* $x^2 + y^2 = 2ax$*.*

Solución 37 *Primeramente, se debe obtener la ED de la familia de curvas dada. La misma, por ejemplo anterior, vimos que es:*

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

De manera que la familia de trayectorias ortogonales tiene la siguiente ED:

$$\frac{-1}{y'} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Es decir:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

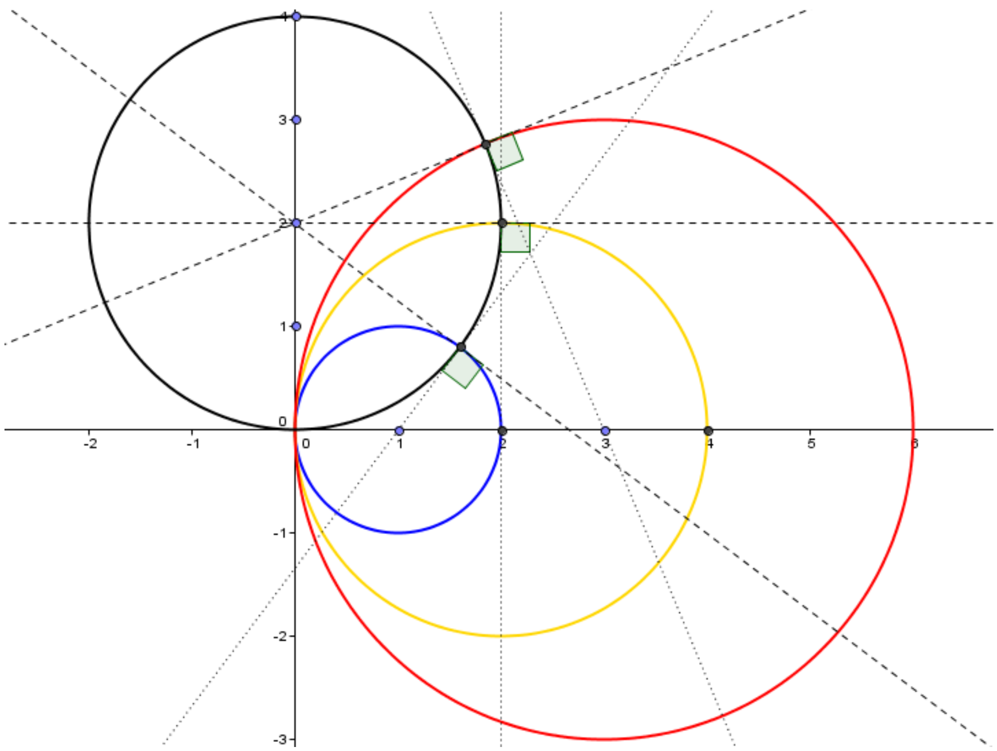
la cual corresponde a una ecuación homogénea. Resolviéndola por los métodos conocidos, tenemos:

$$\begin{aligned}
u'x+u &= \frac{2x^2u}{x^2-x^2u^2}\\
u'x+u &= \frac{2u}{1-u^2}\\
u'x &= \frac{2u}{1-u^2}-u\\
u'x &= \frac{u^3+u}{1-u^2}\\
\frac{1-u^2}{u\left(u^2+1\right)}du &= \frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

Resolviendo esto (hágalo), se llega a:

$$x^2+y^2=Cy$$

Es decir, que las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias $x^2+y^2=2ax$, es la familia $x^2+y^2=Cy$, que corresponden también a circunferencias. Gráficamente:



Se puede apreciar como la circunferencia con centro en el eje y (en negro), corresponde a una trayectoria ortogonal a las 3 circunferencias cuyo centro esta en el eje x (en colores). Claramente, en los puntos de interseccion de la trayectoria ortogonal con las 3 curvas de la familia, se ve que la tangente a dicha trayectoria ortogonal, es perpendicular a las tangentes de las circunferencias de la familia.

1.6.3 Crecimiento y decrecimiento de poblaciones

Si la función $y(t) \geq 0$ denota la población de una especie en el tiempo t, la Ley de Malthus para poblaciones establece que la tasa de variación de una población aislada (sin migración) es proporcional a la población presente. Es decir:

$$y' = ky$$

donde k representa la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad, la cual se asumirá constante. La anterior ED es separable y al resolverla, concluimos que:

$$y = Ce^{kt}$$

en donde tenemos 2 posibilidades:

- Si $k > 0$, $y(t)$ es creciente.
- Si $k < 0$, $y(t)$ es decreciente.

Ejemplo 38 *En un cultivo de bacterias, el número de éstas crece a una tasa proporcional a la cantidad presente. Si el número original se incrementa en un 50% en media hora. ¿En cuánto tiempo se espera tener tres veces el número original?*

Solución 38 *Tenemos que* $y(0) = y_0$, *pues no nos dan una cantidad inicial explícita. Así mismo, se deduce que* $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3y_0}{2}$, *ya que al cabo de media hora hay un* 50% *más de la cantidad inicial, o sea* $y_0 + \frac{y_0}{2} = \frac{3y_0}{2}$. *Además, ya sabemos que:*

$$y(t) = Ce^{kt}$$

Ahora, si hacemos uso de la primera condición, tenemos:

$$\begin{aligned} y(0) &= Ce^{k\cdot 0} \\ y_0 &= C \end{aligned}$$

Así:

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Luego, con la segunda condición hallamos el valor de k:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{2}\right) &= y_0 e^{\frac{k}{2}} \\ \frac{3y_0}{2} &= y_0 e^{\frac{k}{2}} \\ \frac{3}{2} &= e^{\frac{k}{2}} \\ \ln\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{k}{2} \\ 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) &= k \\ \ln\left(\frac{9}{4}\right) &= k \end{aligned}$$

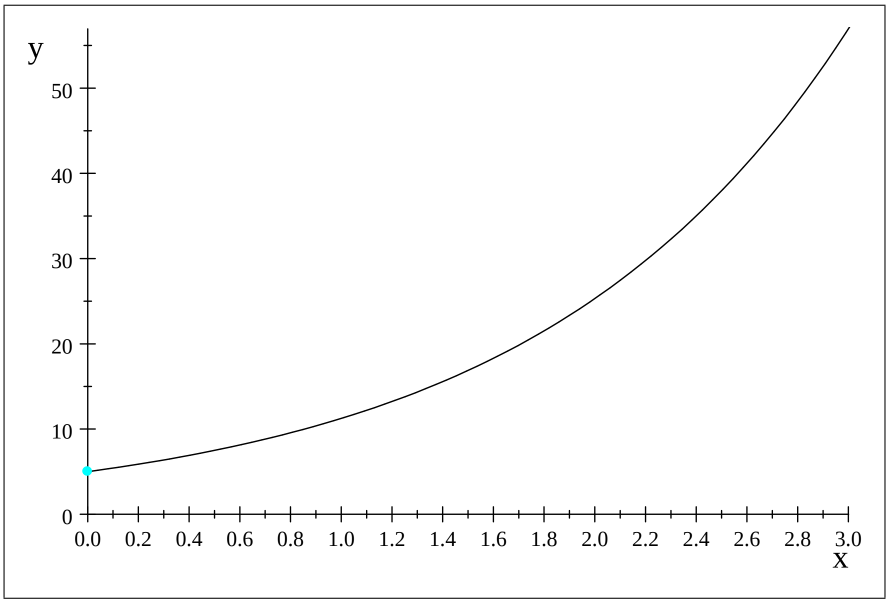
De esta manera:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{t\ln\left(\frac{9}{4}\right)} \\ &= y_0 \left(\frac{9}{4}\right)^t \end{aligned}$$

Finalmente, para determinar el tiempo para el cual se ha triplicado el número inicial, hacemos:

$$\begin{aligned} 3y_0 &= y_0\left(\frac{9}{4}\right)^t \\ 3 &= \left(\frac{9}{4}\right)^t \\ \log_{\frac{9}{4}}^{3} &= t \\ 1.3548 &= t \end{aligned}$$

Es decir, se requiere de alrededor de 1.35 *horas (cerca de* 80 *minutos) para triplicar la cantidad inicial de bacterias en el cultivo. Gráficamente, la curva que representa la función encontrada (suponiendo que* $y_0 = 5$*), está dada por:*



Puede observarse que $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$*. Esto sugiere que la población de bacterias se hará infinita con el transcurrir del tiempo, lo cual claramente no se ajusta a la realidad, debido a factores como falta de espacio físico por la sobrepoblación, falta de alimento, etc.*

Con base en el ejemplo anterior, vemos que la Ley de Malthus no suele ser muy aplicable a largos periodos de tiempo para determinar la poblaciones de especies aisladas. Por esa razón, se presenta el siguiente modelo, el cual es un poco más fidedigno.

1.6.4 Crecimiento logístico

Si a la ecuación de población del problema anterior, le agregamos un "elemento de competencia" a la ecuación, se llega a:

$$y' = ky - py^2$$

Así mismo, si partimos de una población inicial $y(0) = y_0$ y resolvemos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= ky - py^2 \\
\frac{dy}{dt} &= y(k - py) \\
\frac{dy}{y(k-py)} &= dt \\
\underbrace{\left(\frac{1}{ky} + \frac{p}{k(k-py)}\right)}_{\text{Fracciones parciales}} dy &= dt \\
\frac{1}{k}\ln(y) - \frac{1}{k}\ln(k-py) &= t + C \\
\ln\left(\frac{y}{k-py}\right) &= kt + C \\
\frac{y}{k-py} &= Ce^{kt} \\
y &= Ce^{kt}(k-py) \\
y &= \frac{kCe^{kt}}{1+pCe^{kt}}
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la condición inicial, llegamos que:

$$y_0 = \frac{kC}{1+pC}$$

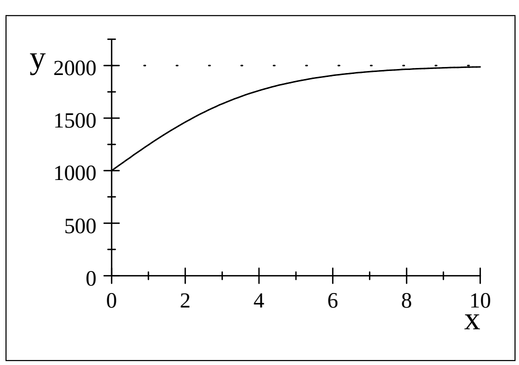
de donde se concluye que:

$$C = \frac{y_0}{k - py_0}$$

Y sustituyendo en la ecuación para luego simplicar, se deduce que:

$$y = \frac{ky_0e^{kt}}{k - py_0 + py_0e^{kt}}$$

Note que $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{k}{p}$. Esto, a diferencia de la Ley de Malthus, nos dice de la existencia de una población que permanecerá creciendo pero de forma cada vez más desacelerada, de manera que va a ser cada vez más próxima a un valor límite, del cual no sobrepasará. Gráficamente, en un caso particular donde $p = \frac{1}{4000}$ y $k = \frac{1}{2}$, se tiene que:



1.7 Mezclas químicas.

En el instante $t = 0$, un tanque contiene un volumen inicial de V_0 galones de mezcla uniforme de agua con $x(0)$ gramos de sal disuelta. Consíderese 2 ductos; el primero que conduce una solución con concentración c_e hacia el interior del tanque, Dicha solución entra con una rapidez r_e. Asimismo, otro ducto lleva la solución del interior del tanque fuera de este con una rapidez de salida r_s y concentración c_s. Asumiendo que la mezcla en el tanque se mantiene uniforme u homogénea en todo momento, se va a establecer un problema de valor inicial que permita determinar la cantidad de sal presente en el tanque $(x(t))$ en el tiempo t. Para ello, haremos uso de estos principios:

$$\begin{aligned}
\text{Concentración} &= \frac{\text{Cantidad}}{\text{Volumen}} \\
\text{Cantidad} &= \text{Rapidez} \cdot \text{Concentración} \\
V(t) &= (r_e - r_s)\, t + V_0 \\
x'(t) &= (\text{Cantidad de sal entrante}) - (\text{Cantidad de sal saliente})
\end{aligned}$$

partiendo de esto último, tenemos que:

$$x'(t) = r_e \cdot c_e - r_s \cdot c_s$$

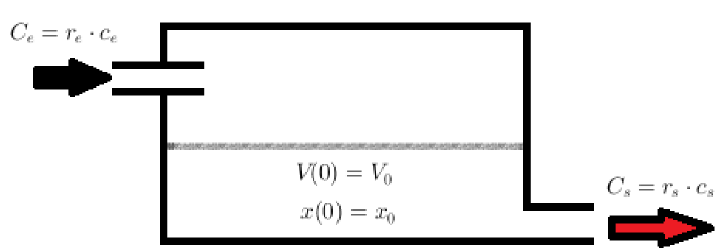
Luego, tanto la concentración y la rapidez de entrada, así como la rapidez de salida son constantes. Mientras que la concentración de salida se expresa así:

$$\begin{aligned}
c_s &= \frac{\text{Cantidad}}{\text{Volumen}} \\
&= \frac{x(t)}{V(t)} \\
&= \frac{x(t)}{(r_e - r_s)\, t + V_0}
\end{aligned}$$

Con lo cual, al sustituir en $x'(t)$, llegamos a:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= r_e \cdot c_e - r_s \cdot c_s \\
x'(t) &= r_e \cdot c_e - r_s \cdot \frac{x(t)}{(r_e - r_s)\, t + V_0} \\
x'(t) + \frac{r_s x(t)}{(r_e - r_s)\, t + V_0} &= r_e \cdot c_e
\end{aligned}$$

la cual corresponde a una EDO de primer orden. Gráficamente, se suele emplear un esquema ilustrativo del problema como el siguiente:



Ejemplo 39 *Un tanque contiene, inicialmente,* $10l$ *de agua en la cual hay disueltos* $2kg$ *de sal. Luego, ingresa una solución salina con una concentración de* $1.5kg$ *por litro, a razón de* $6l$ *por minuto. Así mismo, se abre una llave que expulsa agua del tanque a razón de* $4l$ *por minuto. Determine la función que permite calcular la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo* t.

Solución 39 *Sea* $x(t)$ *la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo* t, *tenemos que la cantidad que entra al tanque es:*

$$\begin{aligned} C_e &= r_e \cdot c_e \\ &= 6 \cdot 1,5 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Donde r_e *y* c_e *representan, respectivamente, la rapidez de entrada y concentración de entrada. La cantidad de sal entrante (así como la saliente) se miden en* $kg/\min$. *Para la cantidad saliente de sal, tenemos que:*

$$\begin{aligned} C_s &= r_s \cdot c_s \\ &= 4 \cdot \frac{x(t)}{10+(3-4)t} \\ &= \frac{4x(t)}{10-t} \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación diferencial que nos moldea el problema es:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 9 - \frac{4x(t)}{10-t} \\ x'(t) + \frac{4x(t)}{10-t} &= 9 \end{aligned}$$

Con la condición inicial $x(0) = 2$. *Esta es una ecuación lineal de primero orden, no homogénea. Tenemos que* $\mu(x) = e^{\int \frac{4}{10-t}dt} = \dfrac{1}{(10-t)^4}$. *Entonces:*

$$\begin{aligned} \frac{x'(t)}{(10-t)^4} + \frac{4x(t)}{(10-t)^5} &= \frac{9}{(10-t)^4} \\ \frac{d\left(\frac{x(t)}{(10-t)^4}\right)}{dt} &= \frac{9}{(10-t)^4} \\ \int \frac{d\left(\frac{x(t)}{(10-t)^4}\right)}{dt} dt &= \int \frac{9}{(10-t)^4} dt \\ \frac{x(t)}{(10-t)^4} &= 9 \cdot \underbrace{\int \frac{dt}{(10-t)^4}}_{u=10-t, du=-dt} \\ \frac{x(t)}{(10-t)^4} &= -9 \cdot \frac{(10-t)^{-3}}{-3} + C \\ \frac{x(t)}{(10-t)^4} &= \frac{3}{(10-t)^3} + C \\ x(t) &= (10-t)^4 \left(\frac{3}{(10-t)^3} + C\right) \\ x(t) &= 3(10-t) + C(10-t)^4 \end{aligned}$$

Entonces $x(t) = 3(10-t) + C(10-t)^4$*. Como* $x(0) = 2$*, entonces:*

$$\begin{aligned} 2 &= 3(10-0) + C(10-0)^4 \\ 2 &= 30 + 10000C \\ -28 &= 10000C \\ \frac{-7}{2500} &= C \end{aligned}$$

Así:

$$x(t) = 3(10-t) - \frac{7}{2500}(10-t)^4.$$

1.8 Reacciones químicas

La ley de la descomposición de una sustancia establece que la rapidez de descomposición de una sustancia radiactiva en un tiempo t es proporcional a la cantidad presente en ese tiempo. Para plantear una ecuación diferencial que modele lo anterior, sean:

$y(t)$ la cantidad de sustancia presente en el tiempo t
$y'(t)$ su razón de cambio en el tiempo t
$y(0)$ la cantidad de sustancia inicial.

De esta manera, tenemos que la ED correspondiente es:

$$y' = -ky$$

con k como constante de descomposición o desintegración. Esta ecuación es separable y su solución es:

$$y(t) = Ce^{-kt}$$

Ejemplo 40 *Suponga que una reacción química se desarrolla con la ley de descomposición. Si la mitad de la sustancia* A *ha sido convertida luego de* $10s$ *de iniciada una reacción. Encontrar el tiempo que toma en transformarse* $\frac{9}{10}$ *del total de dicha sustancia.*

Solución 40 *Para este problema, no tenemos una cantidad inicial explícita de sustancia, por lo que hacemos* $y(0) = y_0$*. Asimismo, tenemos la condición* $y(10) = \frac{y_0}{2}$*, esto porque a los* $10s$ *se ha desintegrado la mitad de la sustancia y por tanto, la cantidad presente es la otra mitad. Nos plantean la interrogante de determinar el tiempo para el cual se ha transformado* $\frac{9}{10}$ *del total de la sustancia, lo cual equivale a determinar el tiempo para el cual la cantidad de sustancia presente es* $\frac{1}{10}$ *del total, o sea, hallar el valor de* t *para el cual* $y(t) = \frac{y_0}{10}$*. Para ello, comenzamos hallando* $y(t)$*. Sabemos ya que:*

$$y(t) = Ce^{-kt}$$

Sabemos ahora que $y(0) = y_0$*, entonces si sustituimos en esta última ecuación, concluimos que:*

$$\begin{aligned} y(0) &= Ce^{-k \cdot 0} \\ y_0 &= C \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Además, como $y(10) = \frac{y_0}{2}$*, cambiando esto en el útimo resultado, nos permite hallar el valor de* $k:$

$$\begin{aligned}
y(10) &= y_0 e^{-10k} \\
\frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-10k} \\
\frac{1}{2} &= e^{-10k} \\
\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -10k \\
\frac{-1}{10}\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= k \\
\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{10}} &= k \\
\ln 2^{\frac{1}{10}} &= k
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 e^{-kt} \\
&= y_0 e^{-t\ln\left(2^{\frac{1}{10}}\right)} \\
&= y_0 \cdot 2^{\frac{-t}{10}}
\end{aligned}$$

Ahora, ya que conocemos $y(t)$*, procedemos a hallar el valor de* t *tal que* $y(t) = \frac{y_0}{10}$*. Entonces:*

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{y_0}{10} \\
y_0 \cdot 2^{\frac{-t}{10}} &= \frac{y_0}{10} \\
2^{\frac{-t}{10}} &= \frac{1}{10} \\
\frac{-t}{10} &= \log_2\left(\frac{1}{10}\right) \\
t &= -10\log_2\left(\frac{1}{10}\right) \\
t &= 10\log_2^{10} \\
t &= 33.21
\end{aligned}$$

Es decir, que resta $\frac{1}{10}$ *del total de la sustancia por convertirse al cabo de* $33.21s$ *de iniciada la reacción.*

Otro proceso químico que se puede modelar mediante una ecuación diferencial es aquel que describe la reacción de varios reactivos (n) para dar lugar a nueva sustancia o producto. Entonces sean:

$R_1, R_2, ..., R_n$ los reactivos de un producto P aún no presente

$r_1, r_2, ..., r_n$ las cantidades iniciales respectivas de dichos reactivos

$x(t)$ la cantidad de P formada al cabo de t minutos.

$p = p_1 + p_2 + ... + p_n$ las partes de P formadas a partir la reacción de las partes $p_1, ..., p_n$ de los reactivos

Entonces, según un corolario de la "Ley de la acción de las masas" para un sólo producto, y suponiendo que la reacción se da en un ambiente con temperatura y presión constantes, se establece el problema con valores en la frontera:

$$\begin{cases} x'(t) = k\left(r_1 - \frac{p_1}{p}x(t)\right)\cdot\left(r_2 - \frac{p_2}{p}x(t)\right)\cdot \ldots \cdot\left(r_n - \frac{p_n}{p}x(t)\right) \\ x(0) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con k una constante de proporcionalidad. Las condiciones obedecen a que se supone que para algún t_0 se asume que se ha formado una cantidad x_0 de producto P. y que al inicio de la reacción, aún no se ha formado ninguna cantidad de P..

Ejemplo 41 *P se produce de una reacción que involucra los reactivos A y B. La formación requiere 3 gramos de A por cada 2 gramos de B. Si inicialmente ($t = 0$ horas), están presentes 90 gramos de A y 40 gramos de B, además, se han formado 75 gramos de P en una hora, determine la cantidad $x(t)$ formada de P en términos del tiempo transcurrido.*

Solución 41 *Bajo el esquema anterior, se debe resolver el problema con valores en la frontera:*

$$\begin{cases} x'(t) = k\left(90 - \dfrac{3x(t)}{5}\right)\left(40 - \dfrac{2x(t)}{5}\right) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 75 \end{cases}$$

Simplificando la ecuación y resolviendo, tenemos:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{6k}{25}(150 - x)(100 - x) \\
\frac{dx}{(150 - x)(100 - x)} &= \frac{6k}{25}dt \\
\underbrace{\left(\frac{-1}{50(150 - x)} + \frac{1}{50(100 - x)}\right)}_{Fracciones\ Parciales}dx &= \frac{6k}{25}dt \\
\frac{1}{50}\ln(150 - x) - \frac{1}{50}\ln(100 - x) &= \frac{6kt}{25} + C \\
\ln\left(\frac{150 - x}{100 - x}\right)^{\frac{1}{50}} &= \frac{6kt}{25} + C \\
\left(\frac{150 - x}{100 - x}\right)^{\frac{1}{50}} &= Ce^{\frac{6kt}{25}} \\
\frac{150 - x}{100 - x} &= Ce^{12kt}
\end{aligned}$$

Ahora como $x(0) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{150 - 0}{100 - 0} &= C \\
\frac{3}{2} &= C
\end{aligned}$$

De donde:

$$\frac{150 - x}{100 - x} = \frac{3}{2}e^{12kt}$$

Y como $x(1) = 75$, *entonces:*

$$\begin{aligned}
\frac{150-75}{100-75} &= \frac{3}{2}e^{12k} \\
3 &= \frac{3}{2}e^{12k} \\
2 &= e^{12k} \\
\ln(2) &= 12k \\
\ln\left(2^{\frac{1}{12}}\right) &= k
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{150-x}{100-x} &= \frac{3}{2}e^{12\ln\left(2^{\frac{1}{12}}\right)t} \\
\frac{150-x}{100-x} &= \frac{3}{2}\cdot 2^t
\end{aligned}$$

Haciendo un pequeño despeje, se concluye que:

$$x(t) = 150\left(\frac{2^t-1}{\frac{3}{2}2^t-1}\right)$$

Note que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 100$

1.9 Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que el ritmo de cambio de la temperatura de un cuerpo respecto al tiempo t, es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y el medio circundante. Es decir, si denotamos por $T(t)$ como la temperatura del cuerpo en cualquier instante t, $T'(t)$ como su ritmo de cambio y T_m como la temperatura (constante) del medio en el que se halla el cuerpo y T_0 la temperatura inicial del cuerpo, entonces el problema de valor inicial que describe esta ley es:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T-T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

con k una constante numérica. Esta ecuación diferencial es separable, por lo que al resolverla, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{T-T_m} &= kdt \\
\ln(T-T_m) &= kt + C \\
T - T_m &= Ce^{kt} \\
T &= Ce^{kt} + T_m
\end{aligned}$$

Al hacer uso de la condición inicial, obtenemos que $k = T_0 - T_m$, de donde:

$$T = (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m$$

Ejemplo 42 *Un objeto se enfría de $100°C$ a $60°C$ en 20 minutos al mantenerse en un medio cuya temperatura se mantiene a $20°C$. Hallar la temperatura del cuerpo en cualquier tiempo t, así como el tiempo que debe transcurrir para que el cuerpo tenga una temperatura de $30°C$.*

Solución 42 *Por la ley de enfriamiento de Newton, tenemos que:*

$$T(t) = (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m$$

Para este problema en concreto, tenemos que $T_0 = 100$ y $T_m = 20$. Así:

$$\begin{aligned} T(t) &= (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m. \\ &= (100 - 20)e^{kt} + 20 \\ &= 80e^{kt} + 20 \end{aligned}$$

En $t = 20$, tenemos que $T(20) = 60$

$$\begin{aligned} T(20) &= 80e^{20k} + 20 \\ 60 &= 80e^{20k} + 20 \\ 40 &= 80e^{20k} \\ \frac{1}{2} &= e^{20k} \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= 20k \\ \frac{1}{20}\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= k \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} &= k \end{aligned}$$

Así, tenemos finalmente que $T(t) = 80e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}} + 20$, es decir $T(t) = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + 20$. Para determinar el tiempo para el cual la temperatura es de $30°C$, hacemos:

$$\begin{aligned} 30 &= 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + 20 \\ 10 &= 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \\ \frac{1}{8} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \\ \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{8}} &= \frac{t}{20} \\ 20\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{8}} &= t \\ 60 &= t \end{aligned}$$

Ejemplo 43 *Un termómetro marca una temperatura de $70°F$ a la 1 pm y es trasladado a un medio cuya temperatura de $10°F$. Dos minutos después, el termómetro marca una temperatura de $26°F$. Determine la temperatura del termómetro a la $1:05$ pm.*

Solución 43 *Por la ley de enfriamiento de Newton, nuevamente tenemos que:*

$$T(t) = (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m$$

Para este problema en concreto, tenemos que $T_0 = 70$ y $T_m = 10$. Así:

$$\begin{aligned} T(t) &= (T_0 - T_m)e^{kt} + T_m. \\ &= (70 - 10)e^{kt} + 10 \\ &= 60e^{kt} + 10 \end{aligned}$$

En $t = 2$, tenemos que $T(2) = 26:$

$$\begin{aligned} T(2) &= 60e^{2k} + 10 \\ 26 &= 60e^{2k} + 10 \\ 16 &= 60e^{2k} \\ \frac{4}{15} &= e^{2k} \\ \ln\left(\frac{4}{15}\right) &= 2k \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{15}\right) &= k \\ \ln\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}} &= k \end{aligned}$$

Así, tenemos finalmente que $T(t) = 60e^{t\ln\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}}} + 10$, es decir $T(t) = 60\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{t}{2}} + 10.$

Para determinar la temperatura a la $1:05$, hacemos

$$\begin{aligned} T(5) &= 60\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{5}{2}} + 10 \\ &= 12.2 \end{aligned}$$

Note además que $\lim_{t\to\infty} T(t) = 10$ ya que $a^t \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $0 < a < 1$. Esto significa que conforme el tiempo transcurra, la temperatura del termómetro será siendo más próxima a la del medio

2 Referencias

- Braun, M. (1990). Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericana. México, DF.
- Céspedes, Julio. (2009). Ecuaciones Diferenciales para Ciencias de la Vida. Escuela de Matemática, Editorial de la Universidad de Costa Rica. San Pedro, San José, Costa Rica.
- Espinoza, E. (1996). Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. 5ta Edición. Lima, Perú.
- Kiseliov, A., Krasnov, M y Makarenko, G (1988). Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial MIR, Moscú.
- Zill, D. (1997). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. 6ta Edición, International Thomson Editores. México, DF.

CONCLUSIONES

La propuesta de virtualización del curso MA-1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería de la Universidad de Costa Rica (UCR) abre un portillo para el paso a la oferta y apertura de cursos virtuales (a nivel de pregrado y grado) a nivel de toda la Escuela de Matemática y hasta la misma universidad, los cuales al menos pueden implementarse de forma inicial con poblaciones con características particulares (como la que se utilizó para elaborar esta propuesta).

En una era como la actual, en la que el Internet ha calado muy fuertemente en la sociedad, la educación no puede esperar a seguir bajo los mismos esquemas en que se desarrolló hace varias décadas o incluso, siglos atrás. Lo anterior aplica para el caso particular de la enseñanza de la Matemática y es por ello que ésta debe incorporar una serie de aportes que el Internet le ofrece para que su evolución. Los entornos virtuales son uno de estos recursos y sin duda, con el aprovechamiento de las potenciales que ofrecen, es posible llevar a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje con las mismas posibilidades para todos los involucrados y apelando a la asincronía, junto con la coincidencia en lugar, como ventajas para el desarrollo de estos procesos.

En el caso particular de este trabajo, con el planteamiento de actividades evaluativas obligatorias y de carácter formativo, se permite tener un mayor seguimiento del estudiante, tanto en el cumplimiento de las mismas, como en los objetivos que dichas actividades persiguen. Esta evaluación contrasta con el carácter sumativo que tiene actual evaluación del curso presencial (resumida en 3 exámenes parciales). Asimismo, la obligatoriedad de las actividades junto con los plazos limitados para su cumplimiento, implican un mayor compromiso de parte del estudiante en lo que respecta a llevar el curso al ritmo con el que éste avanza.

Por otra parte, el empleo de clases virtuales mediante la herramienta “Página” de la plataforma Moodle, permite al estudiante tener una visión más amplia y simple de los contenidos tratados en los Módulos, las cuales al estar acompañadas de herramientas audiovisuales como las imágenes, las presentaciones o los videos, le dan un matiz más dinámico, llamativo y hasta interesante, situación que suele no ser la tónica en la modalidad presencial y que, para el caso de los estudiantes a quienes se dirige la propuesta podría llegar a dar una dosis de motivación, al enfrentar los mismos contenidos que ya abarcó en al menos 2 oportunidades anteriores, de una forma distinta.

Por último, se espera que la puesta en práctica de esta propuesta vaya a tener una valoración positiva por parte de las autoridades de la Sede Interuniversitaria de Alajuela, así como de la Escuela de Matemática de la UCR y valoren la experiencia para en un futuro medianamente cercano, de virtualizar algunos de sus cursos de servicio para casos con poblaciones en particular o bien, para la población en general.