Dirección de Posgrados y Educación Continua

Maestría en Entornos Virtuales de Aprendizaje

Asignatura: Proyecto de Intervención

Título del proyecto:

Elaborado por:

Marlon Leiva Garay

Tutor del proyecto:

Mariela Delauro

2021

Índice

1. Resumen Técnico

Se ha diseñado el proyecto: "Establecimiento de aulas virtuales para la asignatura Algebra Vectorial y Matrices en la Universidad don Bosco de El Salvador", como una acción paliativa contra los efectos que produjo la pandemia del Covid-19 en el ámbito académico, la ausencia de estudiantes, y con el deseo de mantener la continuidad educativa en los estudiantes, que se mantengan recibiendo sus clases. Asimismo, se ha aprovechado la coyuntura para proponer que este modelo de enseñanza y aprendizaje se convierta en parte integral de los servicios que brinda la Universidad a través de sus aulas virtuales, para aquellos estudiantes que, por la distancia, o falta de tiempo no pueden asistir presencialmente al campus universitario.

La naturaleza del proyecto implica la innovación y actualización tecnológica, capacitaciones a los docentes y tutores que se encargarán de brindar este servicio y el desarrollo de materiales didácticos que tengan el ambiente digital como su área de acción. Se pretende utilizar la plataforma de aprendizaje Moodle, ya que la Universidad cuenta con la experiencia de trabajar con este sistema de gestión de aprendizaje, además los materiales didácticos que se produzcan para las aulas virtuales, serán de la autoría de los docentes o tutores de la Universidad.

Dentro de los resultados que el proyecto persigue son: mantener la continuidad educativa de los estudiantes matriculados que llevan actualmente esta asignatura, a futuro aumentar el número de estudiantes de la universidad, específicamente estudiantes del campus virtual, y mejorar los porcentajes de aprobación de los estudiantes.

PROPUESTA DEL PROYECTO

2. El Problema

2.1 Identificación del problema

Debido a la crisis mundial de salud, por la pandemia, los estudiantes de la Universidad Don Bosco se ven imposibilitados de recibir sus clases de manera presencial, y se ha propuesto al centro de estudios que se establezcan servicios educativos en modo virtual, asignaturas como Algebra Vectorial y Matrices se servirían de esta manera, la cual se imparte como asignatura básica para todos los estudiantes de carreras de Ingeniería.

2.2 Justificación del problema

En definitiva, creemos que no hay mejor juego de circunstancias que la situación mundial actual, en la que los docentes nos hemos visto obligados a dejar el salón, la presencialidad e integrarnos a un ambiente virtual. Un aula virtual, va como anillo al dedo en la situación académica actual. Creemos que implementar este tipo de aulas trae consigo beneficios colaterales como el empoderamiento de los docentes de los recursos digitales ya existentes desde antes de la pandemia, pero que poco o nada se sabía de su existencia o de su uso, también abre el espacio para que la educación tenga un alcance mucho mayor al que da el espacio físico de un campus, expandiendo así los horizontes de influencia de la Universidad, si a esto agregamos que los estudiantes son jóvenes que en su mayoría cuentan con acceso a internet y son ellos nativos de la era de la información, en la que el manejo de la tecnología es algo casi natural, y que la Universidad ya contaba con un departamento de educación virtual a distancia desde antes de la pandemia, creo que este proyecto es totalmente viable.

2.3 El contexto del problema

2.3.1 Los y las Estudiantes

Este proyecto está pensado para ponerlo en operación con jóvenes estudiantes de las diversas carreras de ingeniería, jóvenes cuyas edades oscilan entre los 17 y 21 años, la mayoría son dependientes económicamente de sus padres, los cuales son personas trabajadores, asalariados, comerciantes y algunos de ellos profesionales.

La mayoría de los estudiantes cuentan con dispositivos electrónicos como teléfonos inteligentes, tablets, computadoras tipo laptop y/o de escritorio, además poseen conexión a internet provisto por el campus universitario o por sus propios medios.

Los grupos de clase se programan con hasta 40 estudiantes matriculados por grupo, algunos en primera, segunda y tercera matrícula, pues la asignatura en si misma tiene cierto grado de dificultad inherente a asignaturas lógicas – matemáticas. La Universidad apertura entre 6 y 10 grupos de la misma asignatura por ciclo, el número de Maestros asignados a brindar la asignatura son de 5 a 8 docentes por ciclo y los atienden en forma presencial, siendo coordinados por uno de esos docentes, que es el encargado de jornalizar las clases en ciclo, programar y hacer los exámenes parciales y exámenes cortos, así como programar trabajos de investigación cooperativos a lo largo del ciclo.

Aunque los estudiantes manejan con mucha facilidad la tecnología, los diversos entornos virtuales, las redes sociales, comunidades en línea, etc. no se puede asegurar que todos los estudiantes posean la destreza de aprender en ambientes virtuales, por lo cual se hará un acompañamiento de parte del docente o tutor asignado, para desarrollar en ellos estas competencias, el docente dará cierto grado de sistematización al proceso de aprendizaje de los estudiantes en ambientes virtuales, indicando como deberá conducirse en los entornos virtuales a fin de aprovechar al máximo este espacio de aprendizaje.

2.3.2 La asignatura

La asignatura Álgebra Vectorial y Matrices es una materia básica del grupo de materias de Ciencias básicas, comparte lugar durante un ciclo regular con las materias de primer año como Química General, Matemática I o Cálculo Diferencial, etc. La materia cuenta con 3 unidades valorativas del pensum general de materias de las diversas ingenierías que imparte la Universidad, no lleva laboratorio de simulación matemática asistida por computadora.

La Universidad dispone de un libro texto de apoyo al desarrollo de la clase presencial que se ha adecuado según el programa de estudio de la materia, en el que los estudiantes encuentran el desarrollo de los contenidos, junto a ejemplos de solución de ejercicios, así como tiene ejercicios propuestos para que los estudiantes los resuelvan por sí mismos.

El programa de la asignatura Algebre Vectorial y Matrices, ha sido diseñado para contribuir a la formación integral del estudiante de ingeniería, ya que busca desarrollar la competencia de Aplicar matemáticas y ciencias asociadas a Ingeniería para el planteamiento y resolución de problemas, mediante el desarrollo de diversos temas en los que se aplica la lógica matemática, esto busca lograr en los estudiantes desarrollar sus capacidades cognitivas, su lógica matemática, que usarán en las diversas áreas de ingeniería que se atienden en el departamento de ciencias básicas.

Las carreras de ingeniería que incluyen esta asignatura de primer año en su malla curricular son:

1. Ingeniería industrial
2. Ingeniería mecánica
3. Ingeniería mecatrónica
4. Ingeniería biomédica
5. Ingeniería en telecomunicaciones
6. Ingeniería eléctrica
7. Ingeniería electrónica
8. Ingeniería en automatización
9. Ingeniería aeronáutica

La asignatura se desarrolla bajo un enfoque constructivista en donde el aprendizaje se produce por una fuerte interacción entre el conocimiento previo del estudiante y la nueva información, la que se va a agregar a su mente a partir de un proceso de enseñanza-aprendizaje, en nuestro caso la clase magistral, presencial. Además, se busca que el estudiante alcance ciertas competencias, que evidencie que aprendió los contenidos, este enfoque por competencias en la enseñanza nos hace situar al estudiante frente a aspectos que le serán útiles a lo largo de su vida profesional, por eso se busca la experimentación y la práctica de soluciones a problemas propuestos, en donde los estudiantes se vuelven actores de su aprendizaje, y no entes inactivos, meros receptores de información.

Un ciclo regular consta de 16 semanas de clase, en las que reciben 4 horas de 60 minutos de clase a la semana, de manera presencial.

Aunque la asignatura no lleva laboratorio de simulación matemática, en clase hacemos uso de programas de simulación como GeoGebra, Derive y Octave, así como apps de entorno Android con ayuda de los teléfonos inteligentes, con los cuales verificamos soluciones a problemas que se presenten en los diversos contenidos que se desarrollan en las clases.

La experiencia que se ha tenido al pasar al entorno virtual por parte de la mayoría de docentes ha sido satisfactoria, se han desarrollado por completo los contenidos y se han tenido diversas actividades para evaluar a los estudiantes, y obtener una calificación para cada uno, se han desarrollado encuentros sincrónicos con los estudiantes durante cada semana en los que se han brindado asesorías de solución a diversa cantidad de ejercicios propuestos, aclarar dudas, exponer temas de difícil comprensión, asesorar, etc.

Los grupos de clase de manera presencial están distribuidos en horarios que van desde las 7:00 am a las 7:30 pm. La Universidad cuenta con la contratación de 5 a 8 docentes en promedio para que atiendan entre 6 a 10 grupos de clase por ciclo, el número de estudiantes que se atienden por ciclo en promedio es entre 220 y 400 estudiantes, con un porcentaje de aprobación de la asignatura que varía entre el 18% y el 35%. Todos estos datos son obtenidos del portal web de la Universidad don Bosco de El Salvador.

2.3.3 La Institución

La Universidad don Bosco de El Salvador es una Universidad de carisma Salesiana, de inspiración cristiana, la Universidad don Bosco promueve el desarrollo de la persona humana y del patrimonio cultural, en otras palabras, el desarrollo integral de la persona, su participación en la vida social y la construcción de la verdad de una sociedad libre, justa y solidaria, al mayor estilo ejemplificado por don Bosco.

La universidad actualmente realiza su labor de enseñanza en base a dos grandes enfoques pedagógicos: el modelo en base a objetivos y el modelo por competencias. En el caso de la asignatura de Algebra Vectorial y Matrices, ésta se brinda en base a un enfoque por competencias.

La universidad vive en un constante proyecto de innovación, es parte de su ideario, el ir actualizándose y mejorando los diversos procesos de su vida universitaria, por ejemplo, durante la pandemia, la universidad se vio obligada a invertir en hardware que fuera suficiente para sostener los más de mil grupos virtuales que se establecieron a raíz de la pandemia, se tuvo que invertir en mejorar la conectividad de los equipos, cambiar de servidores de red y de proveedores del servicio de internet, adquirir dispositivos de mayor capacidad de almacenaje, etc. La Universidad está abierta a propuestas como la que se hace a través de este documento.

Otras asignaturas que se están impartiendo en modo virtual en la universidad, están haciendo sesiones sincrónicas, elaborando material didáctico propio, creando videos para el aula digital y promoviendo lecturas pues la Universidad ha propuesto una manera específica de servir las asignaturas, algunos docentes que brindan materias que llevan laboratorios han programado prácticas por grupos, y son atendidos de manera presencial por los encargados de los laboratorios, en fechas y horas establecidas, y en grupos pequeños, siguiendo todas las disposiciones de bio-seguridad que las autoridades han establecido.

Se desconoce si existe algún tipo de diagnóstico previo de la labor que se está llevando a cabo en este momento debido a la pandemia, lo más probable es que no, ya que esto tomó a todos por sorpresa, desprevenidos; la Universidad tiene un programa de educación a distancia, por lo que sí cuenta con estudios de factibilidad para el caso, pero debido a la pandemia esta modalidad se generalizo sin previo análisis.

3. Prospectiva

Como institución educativa, la Universidad don Bosco aspira a convertirse en una Universidad que brinde diversas modalidades de aprendizaje, entre ellos el virtual. Un espacio virtual de aprendizaje en el que los estudiantes puedan interactuar con sus docentes y compañeros de manera sincrónica y asincrónica, trabajar en forma colaborativa, en equipo y aprender los diversos contenidos del programa de la asignatura Algebra Vectorial y Matrices, en donde habrá un seguimiento académico de los y las estudiantes en las diversas actividades pedagógicas que se establezcan en el aula virtual, actividades que sean desafiantes a la inteligencia, creativas, didácticamente elaboradas con el fin de lograr el aprendizaje de los estudiantes y que adquieran las competencias deseadas en ellos, un aula en el que se ofrezcan recursos para el aprendizaje personal y colectivo.

Evento	Escenario Probable	Escenario catastrófico	Escenario Utópico	Escenario Futurible
Establecer un espacio de aprendizaje virtual, un aula virtual de la asignatura	Las clases de Algebra Vectorial y Matrices se desarrollan a distancia, en	Las clases de Algebra Vectorial y Matrices vuelven a su	Las clases de Algebra Vectorial y Matrices se desarrollan a distancia, en	Las clases de Algebra Vectorial y Matrices se desarrollan a distancia, en

Algebra Vectorial y Matrices, materia básica en las carreras de ingeniería de la Universidad don Bosco.	un aula virtual, con poca participación de los estudiantes y con pobre acompañamiento del docente, con actividades poco dinámicas y tradicionales, sin hacer mucho uso de herramientas digitales.	formato presencial.	un aula virtual, en la que existen diversas actividades didácticamente preparadas que fomentan la interacción entre estudiantes y docentes, haciendo uso de herramientas digitales,	un aula virtual, y en manera presencial, en la que existe interacción con el docente y entre los estudiantes, se fomenta el trabajo cooperativo con ayuda de diversas actividades didácticamente diseñadas para tal fin, haciendo uso de variadas herramientas digitales en el proceso.

4. La propuesta pedagógica

En este apartado se aborda el aspecto más importante de la propuesta: el enfoque pedagógico, el enfoque que es medular si lo que se quiere es promover un cambio en la realidad educativa de nuestra sociedad, ya que la circunstancia mundial lo está demandando, pero este cambio empieza en el aula, en la relación alumno-docente, de este vínculo se genera el cambio, por eso se afirma que el punto de partida de esta propuesta es pedagógico.

Los expertos en pedagogía y didáctica se han preguntado por el rol que tiene la tecnología en la enseñanza – aprendizaje, si es un fin o un medio, y se ha concluido que la tecnología (Internet, multimedia, las redes, etc.), son un medio para lograr el aprendizaje. Ahora bien, ¿cómo compatibilizar la pedagogía con la tecnología?, la tecnología y el constructivismo? ¿O con la teoría de la Conversación?, etc. Esto es justamente el punto que nos ocupa en este apartado.

Es sabido que la tecnología, las redes, internet, etc. facilitan el proceso del Constructivismo de Vygotsky, el ¿Qué aprenden? ¿Cómo aprenden? ¿Entorno de aprendizaje? y las experiencias, así que asumiremos el modelo del constructivismo en nuestra propuesta educativa.

La actual era humana, la era de la información, exige de la educación un cambio sustancial, con el objeto de hacer a las personas, seres que se adapten a esta sociedad del conocimiento, esto implica que la educación debe enseñar a las personas a aprender, si enseñar a aprender, y conseguir la información que se requiere para resolver los diversos problemas que una persona enfrenta dirigir; saber escoger, discriminar la información y usarla adecuadamente. A este último se le ha dado por llamar "pedagogía informacional" (Picardo) (Joao, 2002) y se adapta muy bien al concepto de aula virtual que se propondrá a la Universidad, trabajar con un enfoque constructivista, basado en competencias y bajo una pedagogía informacional, este enfoque hace uso de la información en todas sus dimensiones, desde el acceso, análisis, interpretación, uso, manejo, evaluación, producción, replicación, etc. Y es en esto que la tecnología se vuelve un medio propicio para lograr estas competencias en los estudiantes, y lograr el aprendizaje.

En este contexto, la propuesta pedagógica estará determinada por los siguientes aspectos:

1. El aprendizaje estará centrado en redes de personas
2. La información es la fuente del aprendizaje
3. El conocimiento es el punto de llegada y es el punto de salida
4. La tecnología es el medio del proceso de enseñanza – aprendizaje

El docente debe propiciar el aprendizaje, desde su inicio hasta la conclusión o cierre de una clase, debe conocer y manejar los conocimientos previos de los estudiantes, debe facilitarles información existente, comprobada, y promover producción individual y colectiva de nueva información. Los estudiantes por su lado deben dejar de ser entes pasivos y deben convertirse en entes activos de su aprendizaje, deben aprender a trabajar en equipo, ser responsables con sus obligaciones, con lo que les corresponde hacer como leer, investigar, hacer algo, preparar algún material, investigar, crear nueva información, etc.

5. Objetivos

5.1 Objetivo General

Constituir un aula virtual de la asignatura Algebra Vectorial y Matrices en la Universidad don Bosco de El Salvador, transformando el entorno de aprendizaje presencial tradicional a fin de darle continuidad a la educación en las carreras de ingeniería, en el contexto de la pandemia mundial, con intención de establecer permanentemente la educación a distancia de esta asignatura en modo virtual.

5.2 Objetivos Específicos

1. Organizar un entorno virtual de aprendizaje con la implementación de un sistema de gestión del aprendizaje (LMS), específicamente en Moodle.
2. Establecer jornadas de capacitación docente en el manejo del sistema de gestión del aprendizaje (LMS)
3. Capacitar a los docentes en metodologías didácticas y uso de herramientas digitales para el aprendizaje en entornos virtuales
4. Crear manuales de uso y manejo del aula virtual para los estudiantes
5. Elaborar una serie de videos en los que se brinde entrenamiento o tutoría para el manejo del aula digital para docentes y para estudiantes

6. Los resultados

En el año 2021, se brindará la cátedra de Algebra Vectorial y Matrices para las carreras de ingeniería de la Universidad don Bosco de El Salvador, haciendo uso de los recursos de e-learning y de las tecnologías adecuadas y necesarias para tal fin; bajo el enfoque de aprendizaje constructivista por competencias, que logre en los estudiantes el aprendizaje personal e interpersonal, la interacción y colaboración mutua y la comunicación horizontal democrática, de modo que permita a los docentes brindar un seguimiento a los estudiantes a lo largo del desarrollo de la cátedra virtual.

7. Aspectos operativos

A continuación se presentan los aspectos operativos del funcionamiento del aula virtual implementada.

7.1 Aspectos operativos de las tecnologías apropiadas a utilizar

El uso del e-learning implica la incorporación de tecnología apropiada para su implementación, en este sentido se hace uso de las siguientes herramientas tecnológicas:

- Sistema de gestión de enseñanza virtual (LMS) o Sistema de gestión de aprendizaje, por sus siglas en inglés, en nuestro caso usamos el sistema Moodle, basado en tecnología PHP y bases de datos MySQL.
- Acceso a Internet cableado o inalámbrico con un ancho de banda de al menos 3Mb.
- Dispositivos de conexión a Internet: laptop, computadora, tablet o Smartphone, con las características mínimas necesarias en cuanto a memoria RAM, velocidad de procesador y almacenamiento, para la conectividad y navegación óptima en la Internet y en el aula virtual.
- Software y aplicaciones utilizados por los docentes y estudiantes: Sistema Operativo Linux o Windows, Microsoft Office o LibreOffice, Screen-o-Matic, Twitter, GeoGebra, Filmora, blooger, Teams, etc.

- Pizarra electrónica o tableta gráfica, usada por los docentes para efectuar la demostración de solución de ejercicios durante los encuentros de clase sincrónicos.

7.1.1 Mapa de prácticas

Práctica de Aprendizaje	Funcionalidad
Clase o encuentro Sincrónico demostrativo	Video conferencia, video, texto, audio, chat
Clase expositiva o encuentro asincrónico	Texto, gráficos, texto, video, audio, navegación, descarga, impresión de documentos
Lecturas requeridas obligatorias y opcionales	Textos, enlaces, navegación, descarga, impresión de documentos
Indagación	Motores de búsqueda, enlaces o links
Demostración	Links de video expositivos, animación, texto, gráficos
Investigación	Texto, enlaces o links, documentos descargables o imprimibles, motores de búsqueda, wikis, Google

	drive, motores de búsqueda, foros, blogs
Preguntas y respuestas	e-mail, foros, tablón del aula digital, chat, videoconferencias
Discusión	Foro, videoconferencia, e-mail, mensajería instantánea del aula digital
Presentación	Blog, foros, videoconferencias, texto, presentaciones descargables o imprimibles
Quiz o examen escrito	Formulario, texto, documentos descargables o imprimibles,

7.2 Aspectos operativos de los materiales didácticos

El uso y manejo de los materiales didácticos es así:

- Una planificación y Jornalización de contenidos de la asignatura, única y es la misma a utilizar por todos los docentes tutores, y estará disponible en el aula virtual para los estudiantes de la asignatura.

- Uso de recursos de la web 2.0: wiki, blog, foro, video, e-book, chat, video conferencia, portafolio digital, simulación y software entre otros, con su respectivo soporte pedagógico y tecnológico, para realizar diversas actividades de aprendizaje en el curso virtual. Estas actividades son diseñadas y desarrolladas por los docentes, haciendo uso de cualquiera de los recursos, según se diseñe la actividad.
- Se crea material de lectura, el cual se coloca en el aula digital para dar un marco teórico a los estudiantes, estos recursos pueden ser inclusive enlaces a sitios fuera del aula digital, que aborden los temas que se están desarrollando en la clase.
- Se cuenta con un libro de apoyo a la cátedra al que se hace referencia en los eventos sincrónicos de discusión de ejercicios, y el cual también cuenta con teoría que abona el desarrollo de las clases.
- Se elaboran videos demostrativos en los que se abordan ejercicios modelos para los estudiantes o se brindan los enlaces de videos demostrativos, previo análisis de su calidad pedagógica y científica por parte de los tutores.

7.2.1 Mapa de materiales didácticos

Material Didáctico	Funcionalidad
Documentos de texto (Word o PDF)	Brindar información de todo tipo relativo a la clase, marco teórico de temas a desarrollar, ejemplos demostrativos, trabajos de investigación, etc. Estos

	materiales podrán ser elaborados por los docentes o se comparten enlaces de documentos de la web, previamente analizados por los docentes
Videos demostrativos	Demostración de resolución de ejercicios modelos, creados por los docentes u otros actores, enlaces de videos en canales de YouTube
Cuenta en twitter	Un espacio de microblogging para abordar temática de la cátedra, además de ser un espacio para anuncios pertinentes a la clase. La clase deberá seguir la cuenta del tutor y hacer usos de los respectivos hashtags proporcionados por el docente.
Libro texto	Creado por la editorial universitaria en el que los estudiantes podrán tener como fuente de consultas o para tener guías de ejercicios, también como un recurso de demostraciones de resolución de ejercicios

7.3 Personal responsable del proyecto

El proyecto será implementado por el departamento de Ciencias básicas de la Universidad por lo cual la coordinación general estará a cargo de la dirección de este departamento.

Serán alrededor de 5 a 8 docentes tutores los responsables de atender a los aproximadamente 350 estudiantes que inscriben la materia cada ciclo de estudios.

Uno de los docentes que imparte la asignatura será el coordinador y será el encargado de establecer y controlar el desarrollo de todas las actividades que se establezcan para la cátedra virtual en aspectos administrativos y técnico pedagógica, organizar exámenes, preparar material, programar actividades, etc.

El docente, en el escenario virtual, es un tutor, el cual realiza las siguientes actividades de apoyo, seguimiento y promoción del aprendizaje en modo virtual:

- Controla y dirige la actividad cognitiva, indicando los documentos a leer y actividades a realizar por parte del estudiante.
- Propiciar la comunicación significativa entre los diferentes integrantes de la clase virtual.
- Facilitar el contacto de los estudiantes con el contexto y temática del curso.
- Elaboración de actividades grupales e individuales que propicien el trabajo y el desarrollo de los aprendizajes.
- Generar espacios de evaluación de actividades con su respectiva retroalimentación.
- Atender con prontitud las consultas o dudas que hacen los estudiantes a través de las redes sociales, e-mails u otro dispositivo de comunicación digital.
- Como parte de la tutoría, cada tutor o docente estará capacitado en el uso de los diferentes programas informáticos que se utilizaran y en el manejo de la plataforma Moodle. Estas capacitaciones se harán de manera continua a lo largo del ciclo, cuando sea necesario y de manera online.

- El staff de docentes tutores estará coordinado por un docente que será el que determinará las actividades a desarrollar, evaluaciones, material didáctico, etc.

7.4 Aspectos Operativos de la Administración del Sistema

La administración de la propuesta educativa es:

- El equipo de administración del aula Moodle será el encargado de todo el aspecto técnico del manejo de la plataforma, la que proporcionará los usuarios de los docentes y de los estudiantes, como ya se hace en la actualidad, solo daremos continuidad a lo ya establecido en la Universidad.
- El equipo administrativo del aula Moodle institucional es el responsable de la matrícula de los estudiantes inscritos en las diversas carreras de ingeniería, de acuerdo con lo establecido por registro académico, se seguirá haciendo uso del proceso actual de inscripción de alumnos en las diversas asignaturas.
- Cada docente o tutor será el responsable de configurar su área de trabajo en Moodle conforme al diseño propuesto por el coordinador de la materia.
- Los recursos didácticos y las actividades serán proporcionados por el docente coordinador.
- El docente coordinador será el encargado de monitorear el desarrollo de la clase a lo largo de todo el ciclo y de dar seguimiento a los demás docentes tutores.
- Cada docente se hará cargo de calificar las diversas actividades evaluadas, y registrar la calificación obtenida por sus estudiantes en el sitio correspondiente proporcionado por la Universidad, los resultados de estas evaluaciones, la devolución de sus actividades estará a cargo de cada docente.

8. Evaluación y seguimiento

La evaluación del proyecto se hará a lo largo de su desarrollo, desde la etapa inicial, hasta la consecución del mismo. Se presentan a continuación los puntos a evaluar con sus respectivos indicadores, así también se detalla la manera de hacer el seguimiento del proyecto.

8.1 Evaluación

Se propone algunos indicadores para evaluación de cada una de las partes del proyecto, así:

8.1.1 Evaluación del modelo pedagógico general

El modelo pedagógico virtual de la Universidad don Bosco de El Salvador se fundamenta en el pensamiento salesiano, en la misión y visión de la Universidad y en el plan estratégico institucional para una formación basada en competencias, a la luz de una postura constructivista. Este modelo implica:

1. Al estudiante como el centro de la actividad académica, el cual es un ente activo y participante de su propio aprendizaje
2. Al tutor o docente como guía, acompañante o facilitador el proceso didáctico
3. Que los temas o contenidos que se presentan al estudiante sean los que requiere comprender
4. Que los objetivos sean los que determinen el quehacer pedagógico
5. Que los recursos apoyen el proceso de enseñanza
6. Que las actividades fomenten el desarrollo de las competencias en los estudiantes

7. Que se hace uso de la tecnología como medio de socialización e interacción de los participantes

8.1.2 Evaluación de las prácticas de aprendizaje y tecnologías

El e-learning debe considerar la incorporación de tecnología adecuada y ajustada al proceso de enseñar y aprender, se debe considerar su diversidad y su calidad, para llevar a cabo procesos de aprendizaje autónomos y dirigidos por el docente o tutor. Entre los indicadores en este apartado tenemos:

- La dotación, el funcionamiento y la administración adecuada del aula digital o la plataforma tecnológica escogida para implementar el aula virtual
- La universidad garantiza la interactividad entre docentes y alumnos, entre estudiantes y material didáctico mediante una infraestructura tecnológica
- Deberá quedar explícitamente explicada la razón por la que se escogen los diversos recursos tecnológicos
- Se establecerán capacitaciones a los docentes o tutores para el manejo adecuado de la plataforma pedagógica utilizada, así como de los diversos recursos adicionales que se utilicen como blog, foros, twitter, etc.

8.1.3 Evaluación del material didáctico

Respecto al material didáctico, se han considerado los siguientes indicadores:

- Los materiales que se elaboren deben estar acordes al modelo pedagógico que fundamenta la asignatura
- Documentos de texto como guías de clase, planificaciones, guías de estudio, guías de ejercicios, evaluaciones, planificación de la asignatura, calendario de actividades, y

otros documentos de utilidad para la acción de enseñar y aprender, deberán estar diseñados de manera adecuada en lo pedagógico como en lo didáctico

- Materiales audio visuales, como videos, presentaciones de diapositivas, micro chat (Twitter), podcast, etc. Deben estar diseñados de manera didáctica
- Recursos informáticos, como correo electrónico, google drive, aula digital, canal de YouTube, foros, etc. Serán considerados recursos didácticos en la medida que se vuelven una extensión del aula, por lo cual su uso deberá apegarse a lo pedagógico – didáctico

8.1.4 Evaluación de la tutoría

En cuanto a la tutoría, se debe considerar:

- Que las acciones que los docentes o tutores realicen esté bien definidos en cuanto a la forma de interactuar con los estudiantes y a la elaboración del material didáctico
- Que los tutores o docentes generen espacios virtuales de interacción con los estudiantes
- Que los tutores utilicen diversas maneras de interacción con los estudiantes mediante nuevas tecnologías, cuando aplique, o hacerlo en diversas redes de comunicación
- Que el docente o tutor planifique el seguimiento, consulta e interacción con los estudiantes en el desarrollo de las diversas actividades de aprendizaje que se establezcan

8.1.5 Evaluación de la administración del proyecto

La administración global del proyecto estará a cargo de la Universidad y el equipo docente y administrativo que velará que:

- Sea la Universidad la que garantice la implementación del modelo educativo que se tiene
- Sea la administración académica de la Universidad la encargada de manejar los aspectos académicos y administrativos de la asignatura en modo virtual
- Exista un régimen académico administrativo que rija la asignatura en modo virtual
- Se brinde apoyo técnico – administrativo a los estudiantes y docentes relacionados a la asignatura brindada en modo virtual

8.2 Seguimiento

Se Propone realizar el seguimiento de tres maneras diferentes, dependiendo del caso situación. Las formas de seguimiento son:

8.2.1 Talleres de reflexión pedagógica

Los talleres serán reuniones con los diversos actores de las diversas áreas del proyecto. Estos encuentros se programarán cada 3 meses o cuando las circunstancias lo ameriten.

8.2.2 Seminarios permanentes

Los seminarios estarán enfocados a trabajar con las diversas áreas del proyecto por separado, y para tratar aspectos de cada área, se darán capacitaciones por miembros de los equipos o por personas externas capacitadas en las diversas áreas del proyecto.

8.2.3 Entrevistas directas

Estas entrevistas se harán cuando las circunstancias lo ameriten con personal específico de áreas determinadas del proyecto, para tratar asuntos pertinentes a ellos y al desarrollo del proyecto, para conocer necesidades, inquietudes, hacer algunos ajustes, etc.

9. Presupuesto

Respecto a este tópico, la Universidad don Bosco cuenta ya con el personal operativo, docentes y tutores, además de los equipos tecnológicos necesarios y suficientes para llevar al cabo el proyecto, lo implica que no se incurrirá en ningún costo adicional para su implementación.

10. Cronograma

Se presenta el siguiente cronograma elaborado en semanas, independientemente de la semana en la que se comience el proyecto, se desarrollarán según se muestra en el cuadro siguiente:

Actividad	Número de semanas																								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Presentación de proyecto a autoridades de la Universidad																									
Presentación del proyecto aprobado para su implementación al personal que participará en el																									
Jornadas de capacitación del personal docente y tutores.																									
Puesta a punto de tecnología a utilizar																									
Elaboración de material didáctico (Documentos de texto, presentaciones, videos, otros materiales digitales)																									
Puesta de acuerdo en la organización del sistema administrativo con el personal encargado de ello																									
Configuración del aula digital en el entorno Moodle																									
Seguimiento.																									
Pruebas de funcionamiento y operación del aula virtual																									

Bibliografía

Joao, O. P. (2002). *semanticscholar.org*. Obtenido de

https://pdfs.semanticscholar.org/2457/053918999e92661db9c2649ef7869f9bb0ac.pdf

DESARROLLO DEL PROYECTO

1. ## Nombre del Curso Virtual: Curso Algebra Vectorial y Matrices 01-2022

2. ## Selección y justificación de las herramientas tecnológicas:

   Al pensar en establecer un aula virtual en la Universidad, pensamos en utilizar las mejores herramientas y en cuanto a eso se optó por la plataforma Moodle ya que es muy versátil y fácil de utilizar por parte de los estudiantes, además la universidad ya cuenta con la infraestructura tecnológica de esta plataforma en sus cursos de educación a distancia. Respecto a otros elementos tecnológicos que se utilizarán en el diseño y elaboración del curso virtual como computadoras, conexión a internet, programas a utilizar en el diseño de las clases se ha buscado lo mejor que está disponible para hacer este trabajo.

3. ## Planificación de las clases:

   1. **Clase 1:** Introducción a los números Complejos. Operaciones

   2. **Objetivo de la clase:**

   Que los estudiantes sean capaces de definir que es un número complejo, que conozcan su origen e historia, y puedan realizar las operaciones aritméticas básicas con ellos.

   3. **Contenidos de la clase:**

   - Definición de números complejos.
   - Operaciones (Suma, resta y producto) con complejos.
   - Igualdad de números complejos.
   - Plano complejo.
   - Módulo, conjugado y opuesto de un número complejo.
   - Cociente de números complejos.

4. **Bibliografía:**

- Leiva, Marlon (2021) Introducción a los Números Complejos. Unidad 1: Los Números Complejos. Re: https://www.udbvirtual.edu.sv/auladigital/pluginfile.php/657247/mod_resource/content/1/Leiva_Marlon_Modulo_ii.pdf
- Breve Historia de los números complejos. Romero Trujillo. Re: https://rotrujil.webs.ull.es/WebAMVI/HISTORIA.pdf
- Operaciones con Complejos. Instituto Monterrey. Re: http://montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-1-19_RESOURCE/U16_L4_T2_text_final_es.html

5. **Recursos Multimedia por utilizar:**

- **Video: Operaciones con Complejos, en el que se ejemplifique las operaciones de suma y resta de números complejos en forma binomial. URL:** https://youtu.be/L2UEf6gn5ZI
- **Imagen Qr en el que se enlace a un web site en el que se explique cómo calcular el conjugado de un número complejo. Se utilizará la aplicación zappar.com u otra. URL:** https://avmudb.blogspot.com/2021/10/el-conjugado-de-un-numero-complejo.html
- **Video: Cociente de números complejos; en el que se explica cómo dividir números complejos en forma binomial. URL:** https://youtu.be/xPQVn_zHWyQ

6. **Actividades por realizar:**

Actividad	Consigna	Objetivo	Evaluación	Plazo
Control de Lectura	Los estudiantes realizarán un examen en la plataforma de Moodle sobre aspectos básicos de la teoría de números complejos.	Los estudiantes evidencien conocimiento sobre el origen de los números complejos, sobre aspectos básicos de la definición de números complejos.	Examen de selección múltiple en donde los estudiantes seleccionarán la respuesta correcta. El promedio de los exámenes cortos tendrá una ponderación del 5% de la nota del periodo.	El examen corto lo harán el viernes, al finalizar la semana 1, en el horario de 10:45 a 11:005 am.
Discusión de Ejercicios en Video Conferencia	Los estudiantes realizarán un encuentro sincrónico con en el que se desarrollará una guía de ejercicios como una discusión de ejercicios modelo, al final del encuentro los estudiantes, en grupos de 5 estudiantes enviarán al docente en formato pdf 5 ejercicios de los que se proponen en la guía.	Los estudiantes serán capaces de realizar las operaciones aritméticas de suma, resta, producto y división de números complejos en forma binomial.	Se recibirán en formato pdf 5 ejercicios de la guía de ejercicios de discusión para su respectiva revisión. El promedio de discusión de ejercicios tiene una ponderación del 10% de la nota del periodo de clases.	La entrega de la discusión de ejercicios se hará en la primera sesión de la semana 2 de clase. Se habilitará una tarea en el aula digital para que los estudiantes envíen la discusión de ejercicios.

7. **Foro:**

Consigna:

“Al estudiar el conjunto de números hemos visto como han surgido y se ha mencionado su utilización en la vida práctica. Respecto a los números complejos:

- ¿Cuál es la diferencia entre el opuesto y el conjugado de un número complejo?
- ¿Por qué se dice que los números complejos son “Cerrados” en el conjunto formado por ellos?”

Objetivo del foro:

Que el estudiante exprese en sus palabras aspectos básicos de la teoría de los números complejos.

Plazo:

Los estudiantes tienen de plazo 7 días para compartir su opinión en el foro, antes que éste se cierre.

1. **Clase 2:** Operaciones con Complejos: División de números complejos, Potencias de “i” y Raíces cuadradas de cantidades negativas.

2. **Objetivo de la clase:**

Que los estudiantes sean capaces de obtener la potencia entera positiva de “i”, además de calcular las raíces cuadradas de cantidades negativas y puedan realizar divisiones entre complejos de forma a + bi.

Contenidos de la clase:

- Cociente o división números complejos.
- Uso del conjugado de un número complejo.
- Potencias de “i”.
- Definición del ciclo de “i”.
- Cálculo de raíces cuadradas de cantidades negativas.

3. Bibliografía:

- Leiva, Marlon (2021) Introducción a los Números Complejos. Unidad 1: Los Números Complejos. Re: https://www.udbvirtual.edu.sv/auladigital/pluginfile.php/657247/mod_resource/content/1/Leiva_Marlon_Modulo_ii.pdf
- Algebra de números Complejos. Re: http://ingenieria.aragon.unam.mx/fesarbook/uploads/libros/29/pdf/N%C3%BAmeros_Complejos.pdf
- Números complejos y potencias de “i”. Re: https://www.guao.org/sites/default/files/N%C3%BAmeros%20complejos%20y%20potencias%20de%20la%20unidad%20imaginaria.pdf

4. Recursos Multimedia por utilizar:

- Video: El plano complejo, en el que se ejemplifique el plano de Argand o plano complejo. URL: https://youtu.be/YOK54NG_Jv0
- Video: Valor Absoluto de números complejos, en el que se ejemplifique como calcular el valor absoluto de los números complejos. URL: https://youtu.be/cbnWslU-mHI
- Imagen Qr en el que se enlace a un web site en el que se explique cómo calcular las potencias de “i”. Se utilizará la aplicación zappar.com. u otra. URL: https://avmudb.blogspot.com/2021/10/calculo-de-potencias-de-i.html

5. Actividades por realizar:

Actividad	Consigna	Objetivo	Evaluación	Plazo
Control de Lectura	Los estudiantes realizarán un examen en la plataforma de Moodle sobre aspectos básicos de la teoría de números complejos.	Los estudiantes evidencien conocimiento sobre el cociente de dos números complejos en forma binomial, el cálculo de raíces cuadradas de números negativos, y el cálculo de las potencias de “i”.	Es un examen de selección múltiple en donde los estudiantes seleccionarán la respuesta correcta. El promedio de todos los exámenes cortos tendrá una ponderación del 5% de la nota del periodo.	El examen corto lo harán el viernes, al finalizar la semana 1, en el horario de 10:45 a 11:005 am.
Discusión de Ejercicios en video conferencia	Los estudiantes realizarán un encuentro sincrónico con el docente en el que se desarrollará una guía de ejercicios como una discusión de ejercicios, al final del encuentro los estudiantes, en grupos de 5 estudiante s nviarán al docente en formato PDF ejercicios de los que se proponen en la guía.	Los estudiantes serán capaces de realizar las operaciones aritméticas de división de números complejos en forma binomial, podrán obtener cualquier potencia de “i” y podrán calcular la raíz cuadrada de cantidades negativas.	Se recibirán en formato pdf 5 ejercicios de la guía de ejercicios de discusión para su respectiva revisión. El promedio de discusión de ejercicios tiene una ponderación del 10% de la nota del periodo de clases.	La entrega de la discusión de ejercicios se hará en la primera sesión de la semana 2 de clase. Se habilitará una tarea en el aula digital para que los estudiantes envíen la discusión de ejercicios.

6. **Foro:**

Consigna:

“A qué se le llama el ciclo de los imaginarios? ¿Es posible tener como respuesta “2i” al realizar alguna potencia de “i”? ¿Por qué?”

Objetivo del foro:

Que el estudiante exprese en sus palabras aspectos básicos de la teoría de los números complejos.

Plazo:

Los estudiantes tienen de plazo 7 días para compartir su opinión en el foro, antes que éste se cierre.

1. **Clase 3**: Soluciones Complejas.

2. **Objetivo de la clase:**

Que los estudiantes sean capaces de calcular las raíces o soluciones de ecuaciones polinómicas en las que se obtengan números complejos entre sus raíces.

3. **Contenidos de la clase:**

- Soluciones Complejas.
- Casos de factorización.

4. **Bibliografía:**

- Leiva, Marlon (2021) Introducción a los Números Complejos. Unidad 1: Los Números Complejos. Re: https://www.udbvirtual.edu.sv/auladigital/pluginfile.php/657247/mod_resource/content/1/Leiva_Marlon_Modulo_ii.pdf
- Algebra de números Complejos. Re: http://ingenieria.aragon.unam.mx/fesarbook/uploads/libros/29/pdf/N%C3%BAmeros_Complejos.pdf
- Raíces reales y complejas. Re: https://libroweb.alfaomega.com.mx/book/682/free/ovas_statics/72/recursos/lecturas/Lectura_Raices_Reales_Y_Complejas.pdf
- Ejercicios de números complejos. Re: https://mestreacasa.gva.es/c/document_library/get_file?folderId=500013956017&name=DLFE-796924.pdf

5. **Recursos Multimedia por utilizar:**

- Video: Soluciones complejas, en el que se ejemplifique como resolver una ecuación polinómica, y obtener raíces reales y complejas. URL: https://youtu.be/X4cL1cpzc_Y

6. **Actividades por realizar:**

Actividad	Consigna	Objetivo	Evaluación	Plazo
Discusión de Ejercicios en video conferencia	Los estudiantes realizarán un encuentro sincrónico con el docente en el que se desarrollará una guía de ejercicios como una discusión de ejercicios modelo, al final del encuentro los estudiantes, en grupos de 5	Los estudiantes serán capaces de realizar las operaciones aritméticas de división de números complejos en forma binomial, podrán obtener cualquier potencia de "i" y podrán calcular la raíz cuadrada	Se recibirán en formato pdf 5 ejercicios de la guía de ejercicios de discusión para su respectiva revisión. El promedio de discusión de ejercicios tiene una ponderación del 10% de la nota del periodo de clases.	La entrega de la discusión de ejercicios se hará en la primera sesión de la semana 2 de clase. Se habilitará una tarea en el aula digital para que los estudiantes envíen la discusión de ejercicios.

	estudiantes enviarán al docente en formato pdf 5 ejercicios de los que se proponen en la guía.	de cantidades negativas.		

7. Foro:

Consigna:

“¿Es posible obtener raíces reales y complejas al resolver una ecuación polinómica?

Objetivo del foro:

Que el estudiante exprese en sus palabras aspectos básicos de la teoría de solución de ecuaciones polinómicas.

Plazo:

Los estudiantes tienen de plazo 7 días para compartir su opinión en el foro, antes que éste se cierre.

4. Redacción de las clases:

Clase 1

Tema: Introducción a los números complejos

Los Números Complejos

$$\sqrt{-1} = i$$

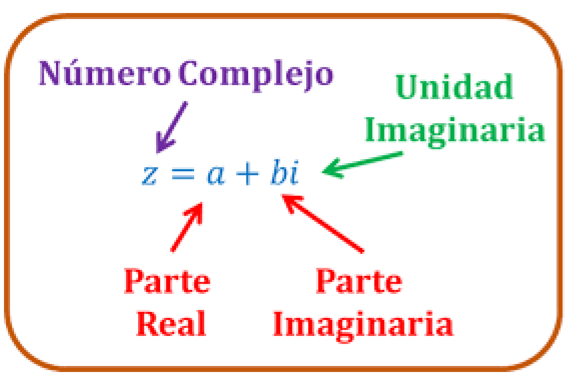
Un saludo cordial a todos. Estamos iniciando la aventura de aprender sobre los números complejos, y no esta demás decir que lo complejo solo va en el tema ya que es por mucho muy fácil, así que pasaremos a ver de qué se trata este tema.

Los números complejos surgen de la unión de los números reales y los números imaginarios.

Así, la de numero complejo es definición es:

$$\boldsymbol{C = \{a + bi\ ,tal\ que\ a\ y\ b\ \in a\ los\ Reales, e\ i = \sqrt{-1}\}}$$

Ejemplos de estos números son: 2+3i, -4+5i, -4+7i, etc.



Los números imaginarios surgen de obtener las raíces cuadradas de cantidades negativas, teniendo la necesidad de definir la unidad imaginaria

Que es:

$$\sqrt{-1} = i$$

Al calcular $\sqrt{-4}$, tenemos

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$$

Otro ejemplo;

$$\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)(9)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$$

Otro más:

$$\sqrt{-12} = \sqrt{(-1)(12)} = \sqrt{12}\sqrt{-1} = \sqrt{12}i = 2\sqrt{3}i$$

Al combinar los números imaginarios con los reales es que surgen los números complejos.

A la forma de escribir los números complejos $\boldsymbol{a + bi}$, se le llama **Forma Binomial, forma polinómica o forma algebraica**,

Podemos hacer operaciones aritméticas con estos números complejos.

Veremos la suma, resta producto y división de números complejos en forma binomial.

Sigue este enlace: Operaciones con Complejos , en él encontrarás un video en el que explico cómo realizar la suma y la resta de números complejos en forma binomial

El producto de complejos en forma binomial se realiza así:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Dejo un ejemplo de producto de complejos:

$$P = (1+2i).(3-4i) =$$
$$= 3 - 4i + 6i - 8i^2 =$$
$$= 3 + 2i - 8.(-1) =$$
$$= 3 + 2i + 8 =$$
$$= 11 + 2i$$

Ahora pasaremos a ver como se hacen las divisiones de números complejos en forma binomial. Sigue el siguiente enlace te llevará a un video en que verás cómo se realiza la división de números complejos en forma binomial. División de complejos, en el video anterior lo explico detalladamente.

Pero antes de ver el video deberías ver como se calcula el conjugado de un número complejo, ya que lo necesitarás en el proceso de división.

Sigue esta imagen QR para ver cómo se obtiene el conjugado de un número complejo:

Los invito a leer la clase completa las veces que sea necesario, así como el material sobre Números complejos que les he dejado en el aula digital, y luego hagan el control de lectura que les proporciono a continuación.

Corresponde hacer un pequeño control de lectura en el que verificarás tu aprendizaje de la clase de hoy. Ve al siguiente enlace, que te lleva al Control de Lectura ubicado en el aula digital. El control de lectura lo debes hacer al final de la clase 1 de la presente semana.

Finalmente te dejo algunos ejercicios para que los discutamos juntos, esto lo haremos el día de la clase a las 8:30 AM, en una sesión de Microsoft Teams al que les enviaré la invitación a su correo justo unos minutos antes de la sesión sincrónica. La discusión se trata de las operaciones básicas de números complejos. Al final de la clase les diré cuales deberán entregar en formato PDF y subirlos al aula digital. Los ejercicios para entregar los podrás enviar a través del aula digital el día de la clase, tienen hasta las 12:00 M para entregarlos. Hagan grupos de 5 estudiantes, ya que dejaré para entregar 5 ejercicios, así les toca uno a cada uno.

Para hacer el documento a enviar debes escanear cada ejercicio hecho y unirlo con los demás ejercicios escaneados, con todos los ejercicios ya escaneados uno de Ustedes hará un documento PDF, el cual enviará a través del aula digital en el lugar que se habilite para ello. Deberás Nombrarlo así: Discusión 1.pdf Te dejo a continuación los ejercicios a resolver.

Ejercicios de discusión

Discusión de Ejercicios

1. Completa la siguiente table a partir de los datos proporcionados en ella

Número Complejo	Parte Real	Parte Imaginaria	Conjugado	Opuesto	Módulo	¿Real o imaginario Puro?
$2-3i$						
$-\sqrt{3}+4i$						
$-2i$						
7						
			$-5-6i$			
	8					
				$9-7i$		
		$-5i$				
					$\sqrt{2}$	
	-1	i				

2. Dados los números complejos:

$$z_1 = -4 + 3i$$

$$z_2 = 2 - 5i$$

$$z_3 = \frac{1}{2}$$

$$z_4 = -i$$

Calcular: a) $(z_3 - z_1)(z_1 z_2 + z_4)$

b) $\overline{z_4 z_1 - z_3}$

c) $|(z_1 + z_2)/z_4\overline{z_2}|$

3. Calcule el valor de "x" e "y" para que se cumplan las siguientes igualdades:
   a) $(3 + xi) + (y + 3i) = 5 + 2i$
   b) $(2 + i)(2 - i)(+yi) = 1 - 4i$

4. Halla el valor de "c" para que el producto $(3 - 6i)(4 + ci)$ sea un número:
   a) Real

   b) Imaginario puro

5. Efectuar:
   a) $(1 - i)(2 + i)$ b) $(2i^4 - 3i^2 + 2i^3)^3$ c) $6i^{127} + 3i^{20} - 14i^{40}$

6. Halle el valor de "z" si: $\boldsymbol{\frac{1+i}{z} - (2i + 1) = i}$

Finalmente te recomiendo que leas la clase siguiente, antes de nuestro segundo encuentro sincrónico en el que desarrollaremos ejercicios ejemplos, de los que salen en las guías de ejercicios y en los exámenes, lee la clase previamente, recuerda que harás un pequeño control de lectura en la clase siguiente, no lo olvides.

También te invito a que visites el foro que he habilitado para cada uno de Ustedes. Este foro estará habilitado toda la semana y en el se discuten algunos aspectos de interés de la clase, es evaluado, y tienes hasta el inicio de la próxima clase para contestar lo que allí se te pregunta. Ve al foro de Introducción a los números complejos.

No me queda más que despedirme esperando haber logrado en Ustedes el aprendizaje que esperaba. Animo, y si algo no lo entienden, les pido que se comuniquen conmigo a través de la mensajería interna del aula digital o de mi correo electrónico: marlon.leiva@udb.edu.sv, estaré pendiente de sus dudas o inquietudes. Nos vemos en la próxima sesión. Hasta Pronto.

Ing. Marlon Leiva Garay

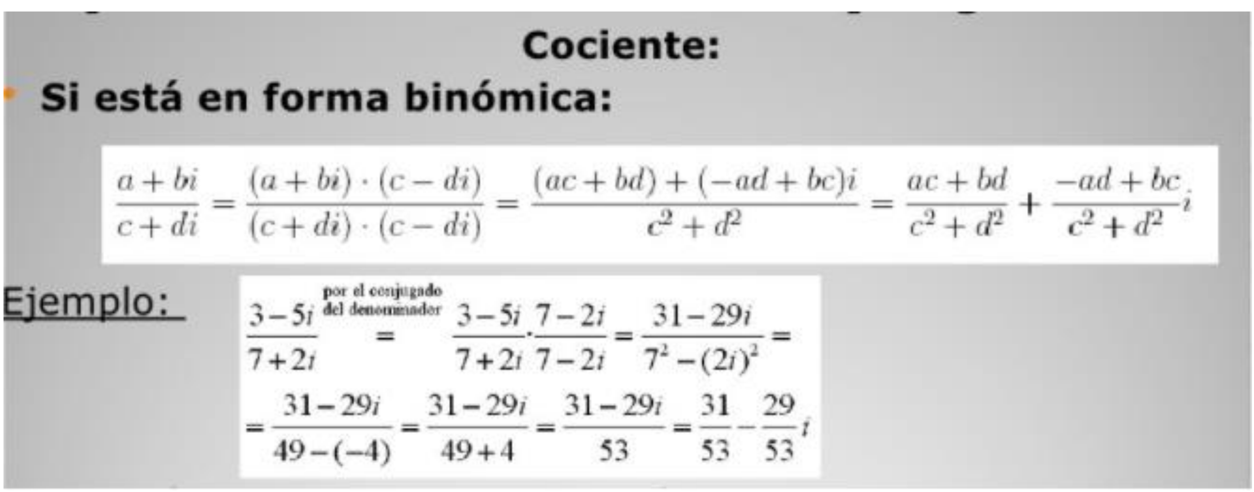
Clase 2

Tema: Operaciones con Complejos: División de números complejos, Potencias de "i" y Raíces cuadradas de cantidades negativas.

¡Hola! Sean todos bienvenidos a nuestra segunda clase, espero que hayan leído ya previamente todo el material, y lo que corresponde a la clase de hoy, así que otra vez bienvenidos. Iniciamos.

Iniciamos retroalimentando la clase anterior.

Recordemos como realizar la división de números complejos en forma binomial.



Veamos unos ejemplos:

Efectuar: a) $\frac{12+3i}{3-5i}$ b) $\frac{-1+4i}{i}$ c) $\frac{1}{1+i}$

Solución:

a) $\frac{12+3i}{3-5i}$

$\frac{12+3i}{3-5i}*\frac{3+5i}{3+5i}=\frac{(12+3i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}=\frac{21+69i}{3^2+5^2}=\frac{21+69i}{34}=\mathbf{\frac{21}{34}+\frac{69}{34}}\boldsymbol{i}$

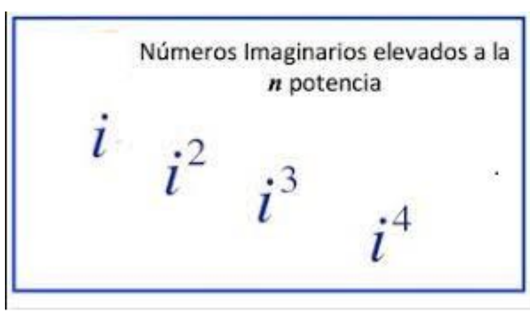
b) $\frac{-1+4i}{i}$

$\frac{-1+4i}{i}*\frac{-i}{-i}=\frac{(-1+4i)(-i)}{(i)(-i)}=\frac{i-4i^2}{-i^2}=\frac{i+4}{-(-1)}=\frac{4+i}{1}=\mathbf{4}+\boldsymbol{i}$

c) $\frac{1}{1+i}$

$$\frac{1}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}=\frac{(1)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1^2+1^2}=\frac{1-i}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\boldsymbol{i}$$

<u>Potencias de i</u>



Ahora pasaremos a ver en que consiste calcular las potencias de "i". Recuerda el ciclo de las potencias de "I"

DEFINICIÓN DE POTENCIAS IMAGINARIAS

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 - 1$$
$$i^3 = -1$$

Para calcular cualquier potencia de i, se divide el exponente de i entre 4 y tomamos como nuevo exponente el residuo.

Escanea con tu teléfono inteligente el siguiente QR que te llevará a que veas como obtener las potencias de i”” ¡!!vamos!!!

SCAN ME

A continuación, te presento el plano de Argand, o plano complejo. Da clic en el siguiente enlace para que puedas ver un video que trata de eso. Video sobre el [plano de Argand o Plano Complejo]

Más adelante utilizaremos bastante lo que se llama el valor absoluto de los números complejos o el Módulo de un número complejo, te dejo el siguiente video para que veas como se obtiene el número en mención. Da clic en el siguiente video para ver cómo obtener el Valor absoluto de un número complejo

Finalmente hemos llegado a la sección de obtener raíces cuadradas de cantidades negativas. Es algo realmente fácil de obtener, solo debes fijarte en el procedimiento requerido.

Raíces cuadradas de números negativos

Aunque ya hemos estado trabajando con este concepto, de obtener la raíz cuadrada de una cantidad negativa, tenemos que hacer hincapié en el hecho que las raíces cuadradas tiene doble signo, es decir que, al obtener la raíz cuadrado de 25, lo correcto es decir que + ó - 5, así, por ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

Y tratándose de raíces cuadradas de cantidades negativas, funcionará de la misma forma, así:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$

$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$

$$\sqrt{-27} = \pm 3\sqrt{3}i$$

Como $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = (-1.i)^2 = (-1)^2\,(i)^2 = 1.i^2 = 1(-1) = -1$, es razonable decir que **i** y – **i** son raíces cuadradas de -1 y escriba

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad -i = -\sqrt{-1}$$

En forma similar,

$$\left(i\sqrt{2}\right)^2 = i^2 2 = -2 \quad \text{y} \quad \left(-i\sqrt{2}\right)^2 = (-i)^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 = i^2.2 = -2$$

Luego, tanto $\sqrt{2}\,i$ como $-\sqrt{2}\,i$ se dice que son las raíces cuadras de -2

Vea entonces que si x es un número real positivo, el número complejo $\sqrt{x}\,i$,

es una raíz cuadrada de $-x$ puesto que $\left(\sqrt{x}\,i\right)^2 = i^2x = -x$.

También, como $\left(-\sqrt{x}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 (-i)^2 = x.i^2 = -x$, entonces $-\sqrt{x}\ i$ es una raíz cuadrada de $-x$.

Hay dos raíces cuadradas de $-x$, y una es la inversa aditiva de la otra.

Definición

Para cualquier número real x positivo, las dos raíces cuadradas de $-x$ son

$$\sqrt{x}i \quad \text{y} \quad -\sqrt{x}\, i$$

Ejemplo.

Halla las raíces cuadradas de -25

Solución una de las raíces cuadradas de -25 es $\sqrt{25}\, i = 5i$, y la otra es

$-\sqrt{25}\, i = -5i$

Como lo mencioné en la clase anterior, haremos un control de lectura, sobre los temas que estamos viendo esta sesión, a ver cómo te fue en la lectura previa que les solicité que hicieran, y de una vez te invito a que leas de antemano la siguiente clase que ya estará habilitada en el aula digital. Corresponde ahora hacer un pequeño control de lectura del que te hable, en el que verificarás tu aprendizaje de la clase de hoy. Ve al siguiente enlace, que te lleva al Control de Lectura ubicado en el aula digital. Este control de lectura lo debes entregar antes de terminar nuestro encuentro sincrónico del día de hoy.

Finalmente te dejo algunos ejercicios para que los discutamos juntos, para eso tendremos nuestro encuentro virtual a las 8:30 AM en el día de la clase. Se trata de las operaciones básicas de números complejos. Al final de la clase les diré cuales deberán entregar en formato PDF y enviarlos a través del aula digital. Tendrán hasta las 12:00 M para entregarlos al finalizar el encuentro sincrónico de este día. Hagan grupos de 5 estudiantes, ya que dejare para entregar 5 ejercicios, así les toca uno a cada uno. Debes nombrar el archivo como Discusión 2.pdf

Ejercicios de discusión

Discusión de Ejercicios

1. Efectuar:

a) $\frac{3-2i}{5+i}$

b) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$

c) $\frac{4}{6-\sqrt{-4}}$

2. Hallar el inverso multiplicativo de

a) $\frac{1}{3} + 2i$

b) $1 + 4i$

c) $3i$

3. Calcula el valor de cada potencia.

$a)\ i^{121}$, $b)\ i^{84}$, $c)\ i^{102}$

$d)\ i^{29} + i^{19}$, $e)\ 3i^{22} - 4i^{100}$

$f) - 3i^{20} - 4i^2$, $g)\ 8i^{39} + 5i^{44}$

$h)\ i^{48} - i^{22} + i^{50}$

$i)\ 5i^{476} - 3i^{258}$, $j)\ (2i^3 + 3i^4 + 2i^7)^2$

$k)\ 5i^{476} - 3i^{260}$

$l) - 4i^2 - 14i^{40} + 3i^{21}$

4. Simplifica

$a)\ (i^4 + i^3 - i^2 + 1)^2$

$b)\ (2i + 3i^3 - 4i^5 - i^7)^2$

$c)\ (i - 1)^2 - (-i - 1)^2 + i^{24}$

5. Calcular:

a) $\sqrt{-289}$
b) $\sqrt{-252}$
c) $\sqrt{-27}$
d) $-2\sqrt{-45}$

Antes de finalizar la clase de hoy les recomiendo que lean la clase siguiente antes de nuestro encuentro sincrónico en el que desarrollaremos ejercicios ejemplos, de los que salen en las guías de ejercicios y en los exámenes, lee la clase previamente.

También te invito a que visites el foro que he habilitado para cada uno de Ustedes. Este foro estará habilitado toda la semana y en él se discuten algunos aspectos de interés de la clase, es evaluado, y tienes hasta el inicio de la próxima clase para contestar lo que allí se te pregunta. Ve al foro de potencias de “i”.

Bueno, me despido esperando haber logrado en Ustedes el aprendizaje que esperaba. Ánimo, y si algo no lo entienden, les pido que se comuniquen conmigo a través de la mensajería interna del aula digital o de mi correo electrónico: marlon.leiva@udb.edu.sv, estaré pendiente de sus dudas o inquietudes. Nos vemos en la próxima sesión. Hasta Pronto.

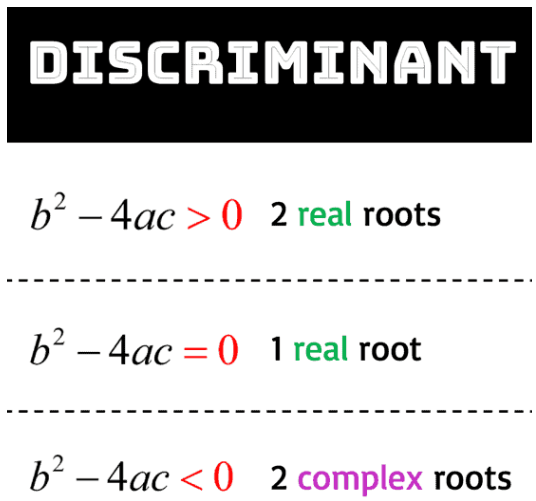
Ing. Marlon Leiva Garay

Clase 3

Tema: Soluciones Complejas

¡Saludos a todos! Que alegría que estén de nuevo en esta jornada de estudio. Hoy nos tocará ver la aplicación de números complejos en la solución de ecuaciones polinómicas. Este tema requiere del manejo de algo que ya han aprendido antes como lo son los casos de factoreo, así que los estudiaremos en el desarrollo del tema por si alguno los ha olvidado ya, vamos juntos por más, ¡¡¡adelante!!!

Al escuchar la frase soluciones complejas, se viene a la mente algo difícil pero no es así, se refiere a soluciones de ecuaciones en donde algunas o todas sus raíces o soluciones son números complejos, por eso el nombre "Soluciones Complejas".



SOLUCIONES COMPLEJAS DE ECUACIONES POLINÓMICAS.

Soluciones Complejas

Cuando resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$ ya sea por factorización o por la fórmula general obtenemos como raíces o soluciones a esta ecuación cuadrática, los siguientes valores:

$$x_2 = 3 \quad y \quad x_2 = 4$$

Ambas raíces o soluciones de la ecuación son valores reales.

Ahora resolvamos la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 16 = 0$

Despejemos la variable x

$$x^2 = -16$$

$$\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = \pm\sqrt{\boldsymbol{-16}}$$

$$x = \pm 4i$$

De donde obtenemos entonces que $\boldsymbol{x_1 = 4i}$ ***y*** $\boldsymbol{x_2 = -4i}$

Estas soluciones o raíces NO son REALES, es decir, no son números reales, son números IMAGINARIOS PUROS, cuya parte real es, en todo caso "cero", entonces nos encontramos en presencia de raíces o soluciones COMPLEJAS, ya que son números complejos las raíces obtenidas, de allí el nombre del tema, soluciones complejas.

Recordando que cuando se obtiene la raíz cuadrada de una cantidad negativa, tenemos que hacer hincapié en el hecho que las raíces cuadradas tiene doble signo, es decir que, al obtener la raíz cuadrado de 25, lo correcto es decir que ± 5 , así, por ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

Y tratándose de raíces cuadradas de cantidades negativas, funcionará de la misma forma, así:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$

$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$

$$\sqrt{-27} = \pm 3\sqrt{3}i$$

Queremos destacar que, al obtener soluciones complejas en una ecuación, estas soluciones siempre van aparejadas, es decir que si $\boldsymbol{a + bi}$ es una raíz de una ecuación, también será raíz de esa ecuación el número $\boldsymbol{a - bi}$, que es su conjugado.

Por tal razón, al resolver la ecuación $x^2 + 16$ obtenemos como raíces los números $\boldsymbol{4i}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{-4i}$ que son soluciones complejas conjugadas entre sí.

En esta sesión, nuestro principal interés será el de determinar las raíces reales y/o complejas de una ecuación polinomial de grado $n \geq 1$.

Un número complejo r es una raíz (compleja) de una ecuación polinomial P si $P(r) = 0$.

Ejemplo 1

La ecuación polinomial P definida como

$P(x) = (x+3)^3(x+1)^2(x^2+9) = 0$ es de grado 7, por lo que P tiene 7 raíces; estas son:

$$-3, -3, -3, -1, -1, 3i \quad y \quad -3i$$

El número -3 es una raíz de multiplicidad tres, y -1 es una raíz de multiplicidad dos.

Ejemplo 2

Encuentra el polinomio $P(x)$ de grado cuatro con coeficientes reales si P tiene a $1-i$ y $-2i$ como raíces.

Solución sabemos que si $1-i$ y $-2i$ son raíces de P, entonces sus conjugados $1+i$ y $2i$ también son raíces de P. Por tanto,

$$P(x) = [x-(1-i)][x-(1+i)][x-(-2i)][x-2i]$$

$$= x^2 - x(1+i) - x(1-i) + (1-i)(1+i) + x^2 - 2xi + 2xi + 4$$

$$= (x^2 - x - xi - x + xi + 1 + 1)(x^2+4)$$

$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$$

Ejemplo 3

Resuelva la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$

Solución: Al aplicar la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ con } a = 1, b = -2 \ \ y \ \ c = 2,$$

tenemos:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x = 1 \pm i$$

Por tanto, las soluciones son $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$

Te invito a que veas el siguiente video en el que podrás tener más claro el procedimiento para resolver una ecuación en la que haya raíces complejas, el Video de soluciones complejas está aquí: Video

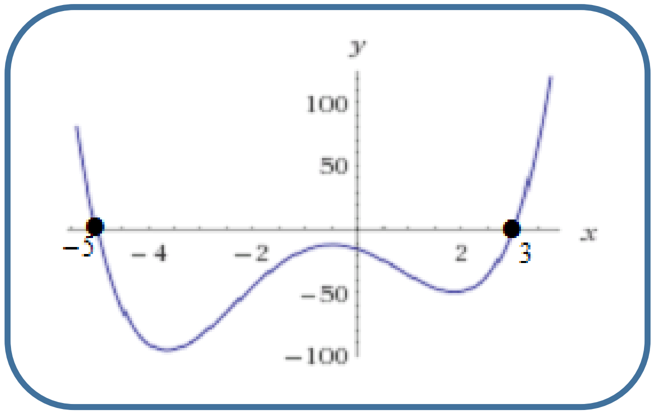
Otro ejemplo:

Resolver: $P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

Solución

Las raíces reales posibles son factores de -15. Estos divisores son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

Se traza la gráfica de P, la cual se muestra en la Figura 1

Figura  1

De la gráfica, las únicas raíces reales posibles son -5 y 3. Si calculamos $P(-5)$ y $P(3)$ en cada caso obtenemos 0. Por tanto -5 y 3 son raíces reales de P

Corroboremos lo anterior mediante división sintética.

1	3	- 12	- 13		- 15	- 5
	- 5	10	10		15	
1	- 2	- 2	- 3	3	0	
	3	3	3			
1	1	1	0			

De esta manera, $P(x) = (x + 5)\,(x - 3)(x^2 + x + 1)$

Si se iguala a 0 el factor cuadrático y se resuelve la ecuación mediante la fórmula cuadrática se tiene:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, las cuatro raíces de P son $\boldsymbol{-5, 3, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \ y \ \ \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

Finalmente te dejo algunos ejercicios para que los discutamos juntos, en el encuentro sincrónico que se llevará a cabo el día de la clase a las 8:30 AM. Se trata de soluciones complejas. Al final de la clase les diré cuales deberán entregar en formato PDF y subirlos al aula digital. Hagan grupos de 5 estudiantes, dejaré para entregar 3 ejercicios, así les toca uno a cada uno. Estos ejercicios los deberás entregar antes de las 12:00 M del día de la clase, a través del aula digital. Colócale el nombre Discusión 3.pdf

Ejercicios de discusión

Discusión de Ejercicios

1. Encontrar los "ceros" de la ecuación polinómica y usarlos para expresar p(x) = 0 como un producto de polinomios lineales, si la ecuación es:
$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$$
2. Resolver: $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$
3. Resolver: $x^3 + 10x^2 + 169x = 0$
4. Resolver: $x^4 - 1 = 0$
5. Resolver: $x^5 - x^3 - 20x = 0$
6. Encontrar las raíces o los "ceros" de la siguiente ecuación polinómica:
$$x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x - 32 = 0$$
7. Resolver $3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 40 = 0$ si $2i$ es una de sus raíces.

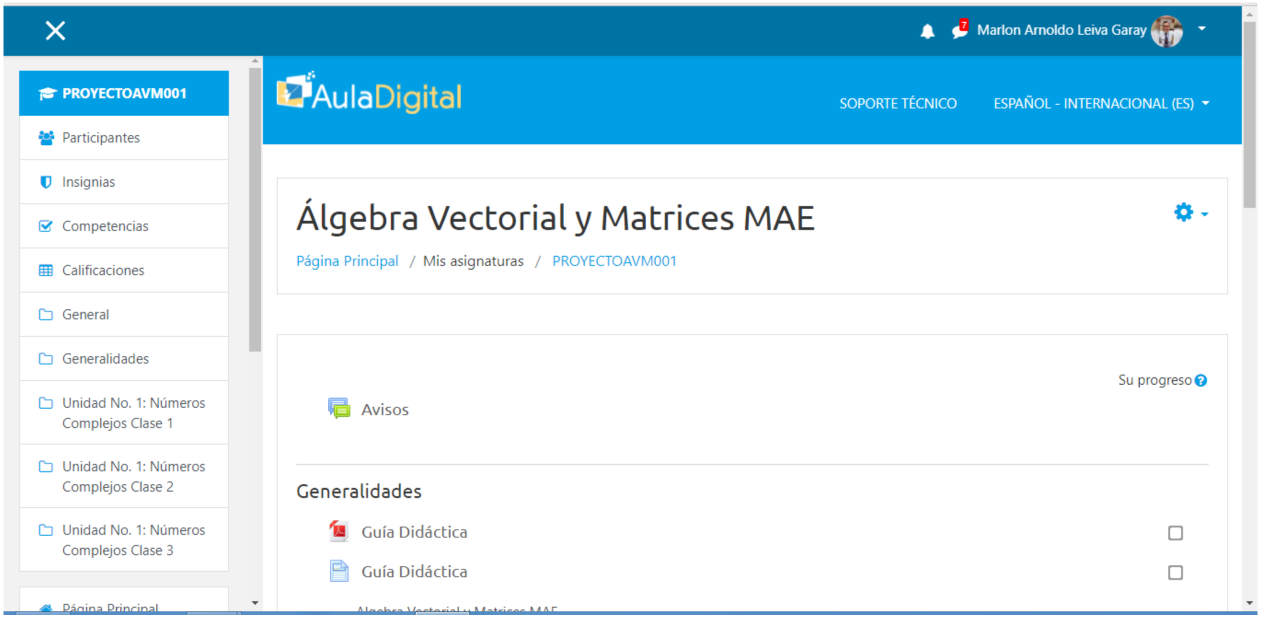
Antes de finalizar la clase de hoy les recomiendo que lean la clase siguiente, antes de nuestro encuentro sincrónico en el que desarrollaremos ejemplos, de los que salen en las guías de ejercicios y en los exámenes, lee la clase previamente, recuerda que harás un pequeño control de lectura en la clase siguiente, no lo olvides.

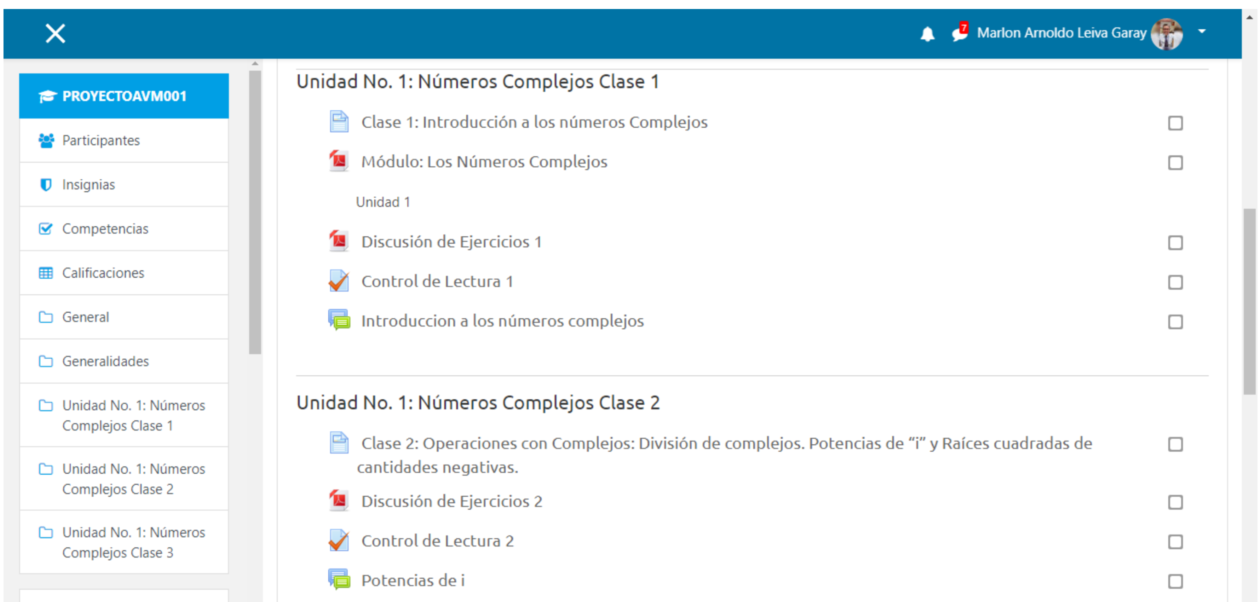
También te invito a que visites el foro que he habilitado para cada uno de Ustedes. Este foro estará habilitado toda la semana y en él se discuten algunos aspectos de interés de la clase, es evaluado, y tienes hasta el inicio de la próxima clase para contestar lo que allí se te pregunta. Ve al foro de soluciones complejas.

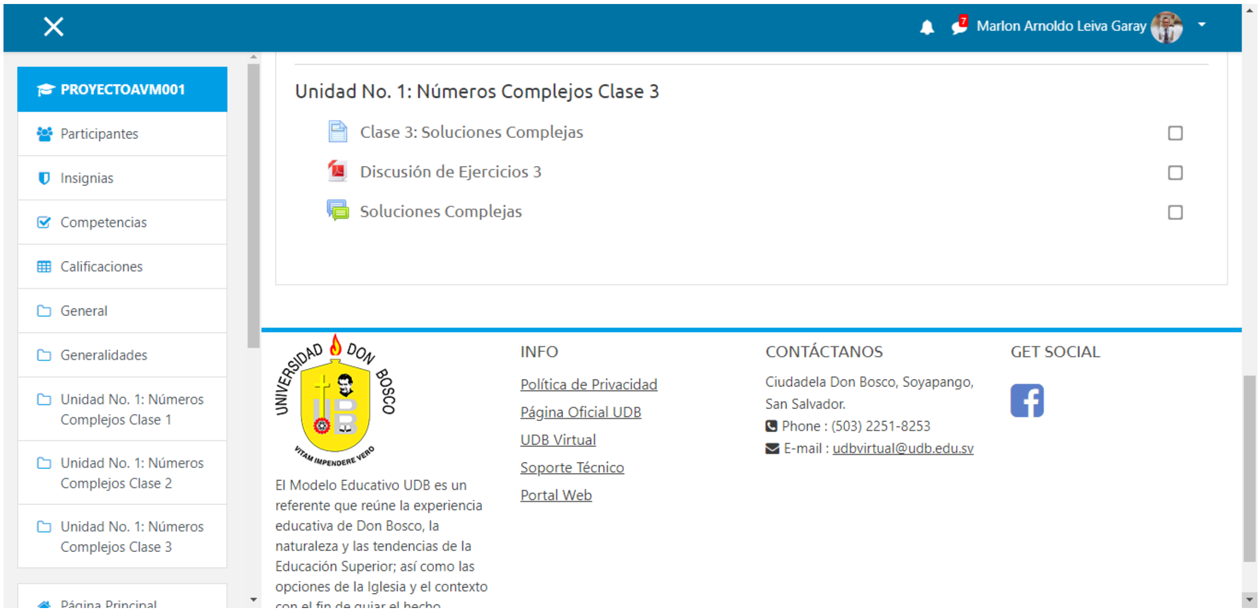
Por hoy me despido deseándoles mucho ánimo, y si algo no lo entienden, les pido que se comuniquen conmigo a través de la mensajería interna del aula digital o de mi correo electrónico: marlon.leiva@udb.edu.sv, estaré pendiente de sus dudas o inquietudes. Nos vemos en la próxima sesión. Hasta luego.

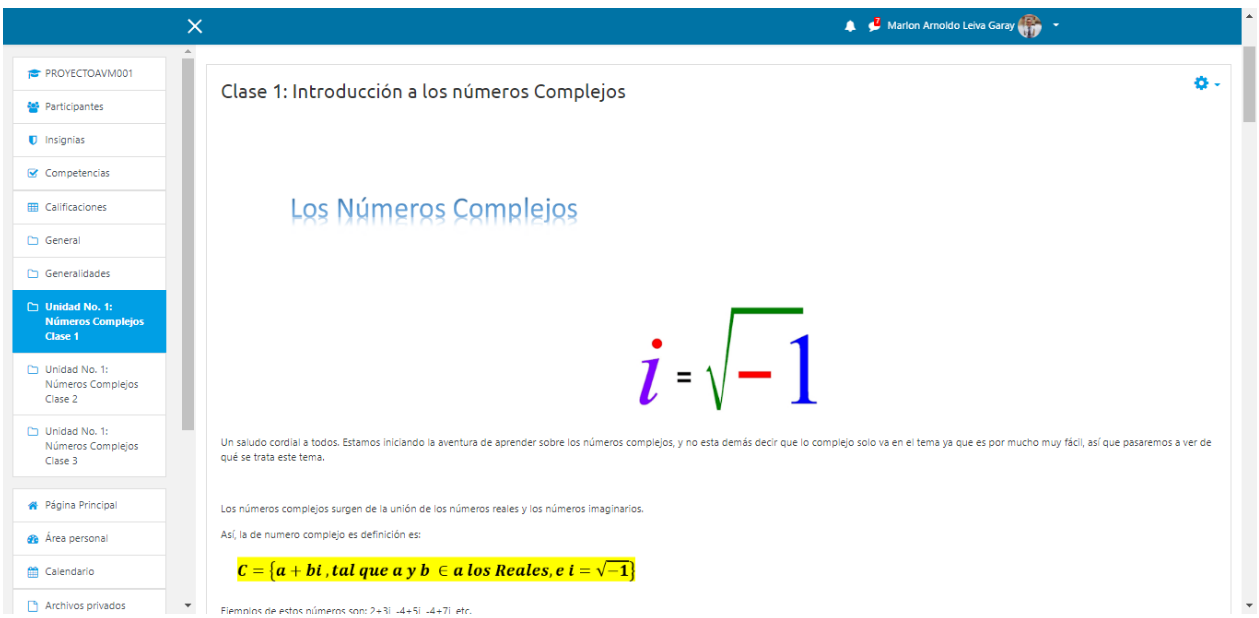
Ing. Marlon Leiva Garay

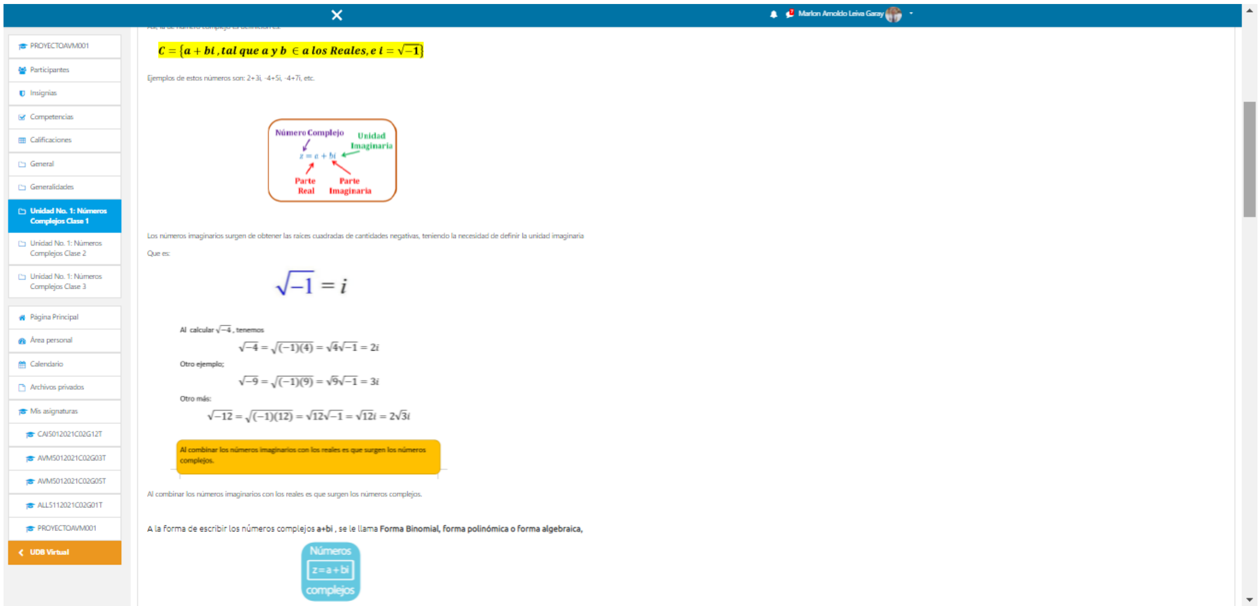
5. Captura de Pantalla de las clases:



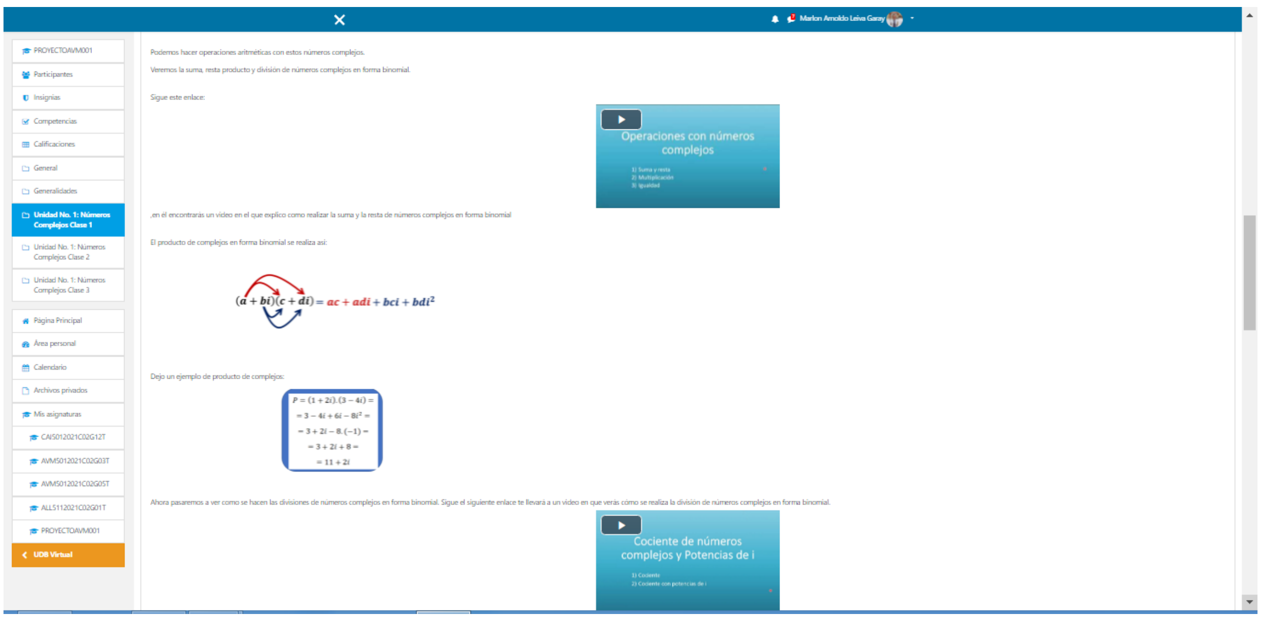



Marlon Arnoldo Leiva Garay
PROYECTOAVM001
Participantes
Insignias
Competencias
Calificaciones
General
Generalidades
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 1
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 2
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 3
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 3
Clase 3: Soluciones Complejas
Discusión de Ejercicios 3
Soluciones Complejas
UNIVERSIDAD DON BOSCO
VITAM IMPENDERE VERO
El Modelo Educativo UDB es un referente que reúne la experiencia educativa de Don Bosco, la naturaleza y las tendencias de la Educación Superior; así como las opciones de la Iglesia y el contexto
INFO
Política de Privacidad
Página Oficial UDB
UDB Virtual
Soporte Técnico
Portal Web
CONTÁCTANOS
Ciudadela Don Bosco, Soyapango, San Salvador.
Phone : (503) 2251-8253
E-mail : udbvirtual@udb.edu.sv
GET SOCIAL

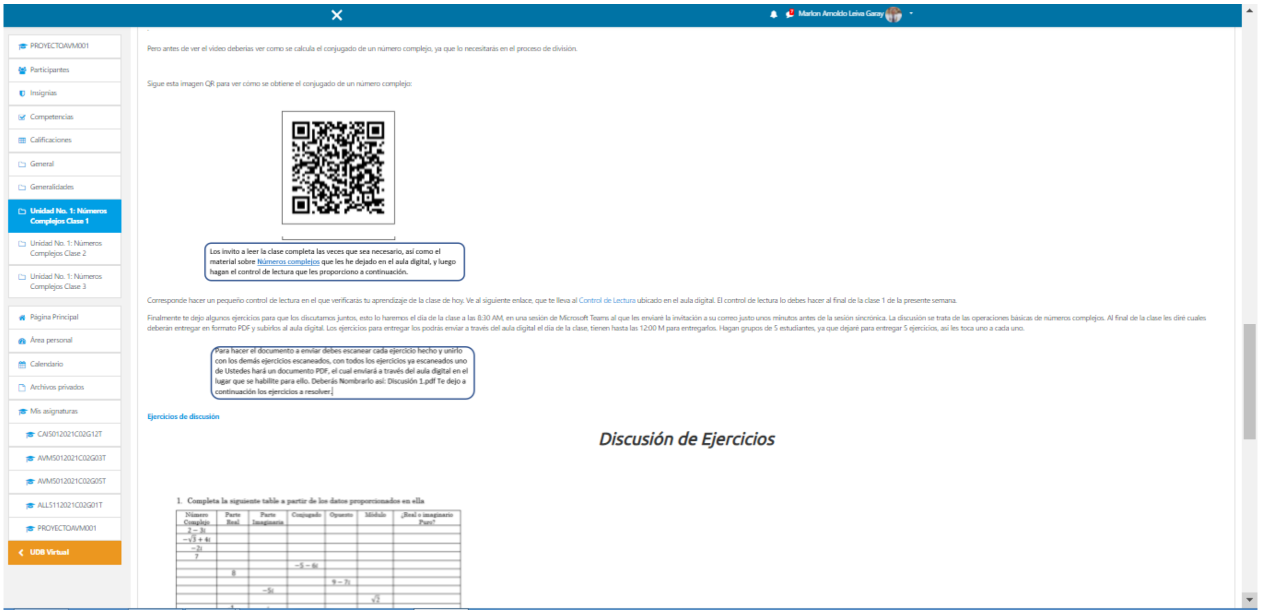

Marlon Arnoldo Leiva Garay
PROYECTOAVM001
Participantes
Insignias
Competencias
Calificaciones
General
Generalidades
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 1
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 2
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 3
Página Principal
Área personal
Calendario
Archivos privados
Clase 1: Introducción a los números Complejos
Los Números Complejos
i = √−1
Un saludo cordial a todos. Estamos iniciando la aventura de aprender sobre los números complejos, y no esta demás decir que lo complejo solo va en el tema ya que es por mucho muy fácil, así que pasaremos a ver de qué se trata este tema.
Los números complejos surgen de la unión de los números reales y los números imaginarios.
Así, la de numero complejo es definición es:
C = {a + bi , tal que a y b ∈ a los Reales, e i = √−1}



Marlon Arnoldo Leiva Garay
PROYECTOAVM001
Participantes
Insignias
Competencias
Calificaciones
General
Generalidades
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 1
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 2
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 3
Página Principal
Área personal
Calendario
Archivos privados
Mis asignaturas
CAI5012021C02G12T
AVM5012021C02G03T
AVM5012021C02G05T
ALL5112021C02G01T
PROYECTOAVM001
UDB Virtual
$C = \{a + bi\ , tal\ que\ a\ y\ b\ \in a\ los\ Reales, e\ i = \sqrt{-1}\}$
Ejemplos de estos números son: 2+3i, -4+5i, -4+7i, etc.
Número Complejo
Unidad Imaginaria
$z = a + bi$
Parte Real
Parte Imaginaria
Los números imaginarios surgen de obtener las raices cuadradas de cantidades negativas, teniendo la necesidad de definir la unidad imaginaria
Que es:
$\sqrt{-1} = i$
Al calcular $\sqrt{-4}$, tenemos
$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$
Otro ejemplo;
$\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)(9)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3i$
Otro más:
$\sqrt{-12} = \sqrt{(-1)(12)} = \sqrt{12}\sqrt{-1} = \sqrt{12}i = 2\sqrt{3}i$
Al combinar los números imaginarios con los reales es que surgen los números complejos.
Al combinar los números imaginarios con los reales es que surgen los números complejos.
A la forma de escribir los números complejos a+bi , se le llama Forma Binomial, forma polinómica o forma algebraica,
Números
z=a+bi
complejos



Marlon Arnoldo Leiva Garay
PROYECTOAVM001
Participantes
Insignias
Competencias
Calificaciones
General
Generalidades
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 1
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 2
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 3
Página Principal
Área personal
Calendario
Archivos privados
Mis asignaturas
CAI5012021C02G12T
AVM5012021C02G03T
AVM5012021C02G05T
ALL5112021C02G01T
PROYECTOAVM001
UDB Virtual
Podemos hacer operaciones aritméticas con estos números complejos.
Veremos la suma, resta producto y división de números complejos en forma binomial.
Sigue este enlace:
Operaciones con números complejos
1) Suma y resta
2) Multiplicación
3) Igualdad
,en él encontrarás un video en el que explico como realizar la suma y la resta de números complejos en forma binomial
El producto de complejos en forma binomial se realiza asi:
$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$
Dejo un ejemplo de producto de complejos:
$P = (1 + 2i).(3 - 4i) =$
$= 3 - 4i + 6i - 8i^2 =$
$= 3 + 2i - 8.(-1) =$
$= 3 + 2i + 8 =$
$= 11 + 2i$
Ahora pasaremos a ver como se hacen las divisiones de números complejos en forma binomial. Sigue el siguiente enlace te llevará a un video en que verás cómo se realiza la división de números complejos en forma binomial.
Cociente de números complejos y Potencias de i
1) Cociente
2) Cociente con potencias de i



Marlon Arnoldo Leiva Garay

Pero antes de ver el video deberías ver como se calcula el conjugado de un número complejo, ya que lo necesitarás en el proceso de división.

Sigue esta imagen QR para ver cómo se obtiene el conjugado de un número complejo:

Los invito a leer la clase completa las veces que sea necesario, así como el material sobre Números complejos que les he dejado en el aula digital, y luego hagan el control de lectura que les proporciono a continuación.

Corresponde hacer un pequeño control de lectura en el que verificarás tu aprendizaje de la clase de hoy. Ve al siguiente enlace, que te lleva al Control de Lectura ubicado en el aula digital. El control de lectura lo debes hacer al final de la clase 1 de la presente semana.

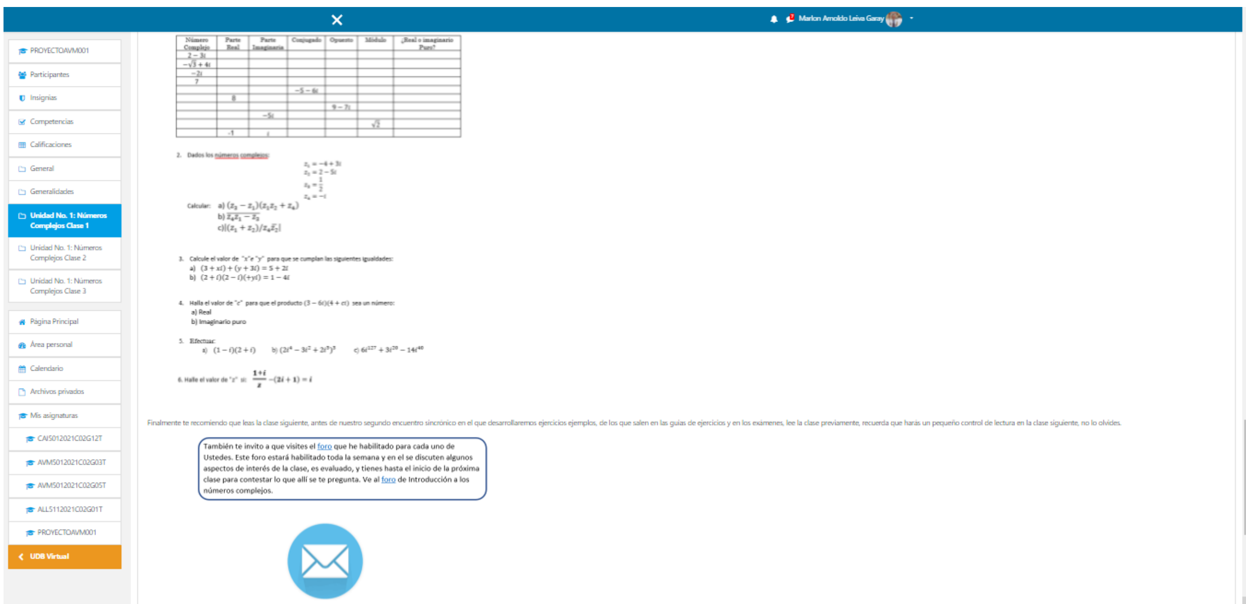
Finalmente te dejo algunos ejercicios para que los discutamos juntos, esto lo haremos el día de la clase a las 8:30 AM, en una sesión de Microsoft Teams al que les enviaré la invitación a su correo justo unos minutos antes de la sesión sincrónica. La discusión se trata de las operaciones básicas de números complejos. Al final de la clase les diré cuales deberán entregar en formato PDF y subirlos al aula digital. Los ejercicios para entregar los podrás enviar a través del aula digital el día de la clase, tienen hasta las 12:00 M para entregarlos. Hagan grupos de 5 estudiantes, ya que dejaré para entregar 5 ejercicios, así les toca uno a cada uno.

Para hacer el documento a enviar debes escanear cada ejercicio hecho y unirlo con los demás ejercicios escaneados, con todos los ejercicios ya escaneados uno de Ustedes hará un documento PDF, el cual enviará a través del aula digital en el lugar que se habilite para ello. Deberás Nombrarlo así: Discusión 1.pdf Te dejo a continuación los ejercicios a resolver.

Ejercicios de discusión

Discusión de Ejercicios

1. Completa la siguiente table a partir de los datos proporcionados en ella



Número Complejo	Parte Real	Parte Imaginaria	Conjugado	Opuesto	Módulo	¿Real o imaginario Puro?
$2-3i$						
$-\sqrt{3}+4i$						
$-2i$						
7						
			$-5-6i$			
	8					
				$9-7i$		
		$-5i$				
					$\sqrt{2}$	
	-1	i				

2. Dados los números complejos:

$$z_1=-4+3i$$
$$z_2=2-5i$$
$$z_3=\frac{1}{2}$$
$$z_4=-i$$

Calcular: a) $(z_3-z_1)(z_1z_2+z_4)$
b) $\overline{z_4z_1-z_3}$
c) $|(z_1+z_2)/z_4\bar{z}_2|$

3. Calcule el valor de "x" e "y" para que se cumplan las siguientes igualdades:
a) $(3+xi)+(y+3i)=5+2i$
b) $(2+i)(2-i)(+yi)=1-4i$

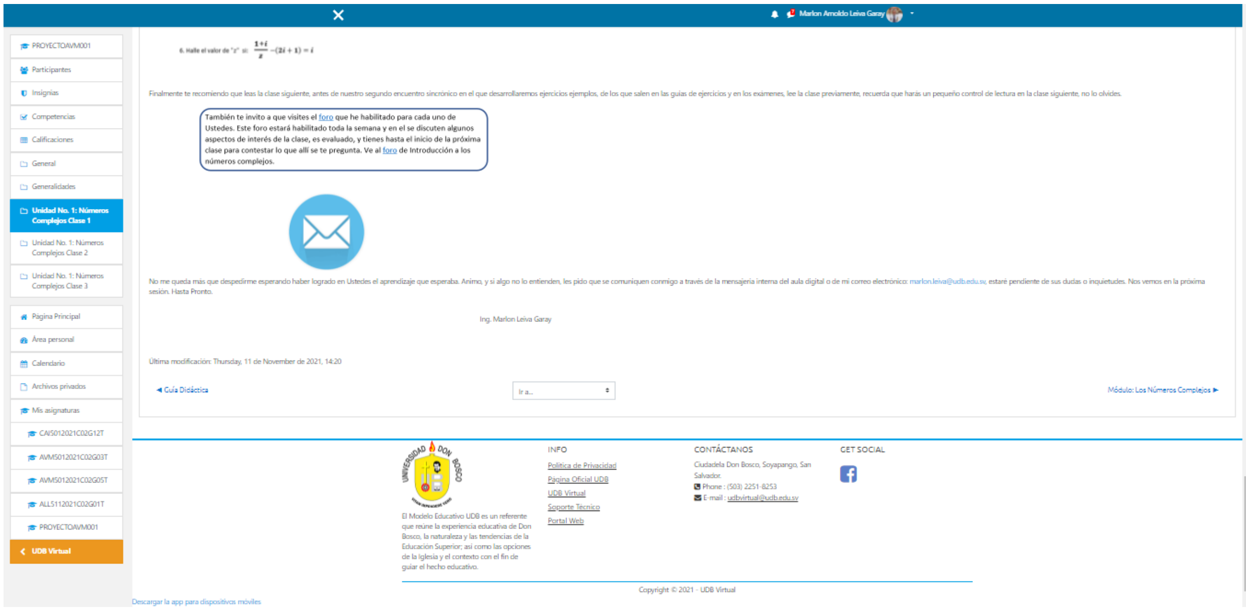
4. Halla el valor de "c" para que el producto $(3-6i)(4+ci)$ sea un número:
a) Real
b) Imaginario puro

5. Efectuar:
a) $(1-i)(2+i)$ b) $(2i^4-3i^2+2i^3)^3$ c) $6i^{127}+3i^{20}-14i^{40}$

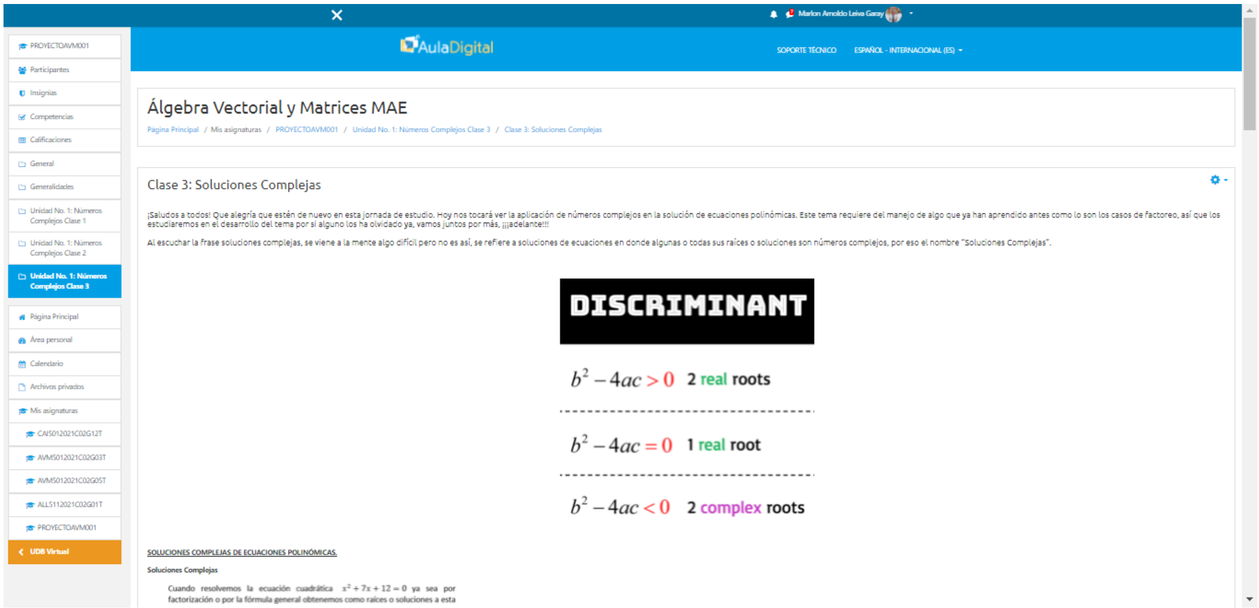
6. Halle el valor de "z" si: $\frac{1+i}{z}-(2i+1)=i$

Finalmente te recomiendo que leas la clase siguiente, antes de nuestro segundo encuentro sincrónico en el que desarrollaremos ejercicios ejemplos, de los que salen en las guías de ejercicios y en los exámenes, lee la clase previamente, recuerda que harás un pequeño control de lectura en la clase siguiente, no lo olvides.

También te invito a que visites el foro que he habilitado para cada uno de Ustedes. Este foro estará habilitado toda la semana y en el se discuten algunos aspectos de interés de la clase, es evaluado, y tienes hasta el inicio de la próxima clase para contestar lo que allí se te pregunta. Ve al foro de Introducción a los números complejos.


Marlon Arnoldo Leiva Garay
6. Halle el valor de "z" si: $\frac{1+i}{z}-(2i+1)=i$
Finalmente te recomiendo que leas la clase siguiente, antes de nuestro segundo encuentro sincrónico en el que desarrollaremos ejercicios ejemplos, de los que salen en las guías de ejercicios y en los exámenes, lee la clase previamente, recuerda que harás un pequeño control de lectura en la clase siguiente, no lo olvides.
También te invito a que visites el foro que he habilitado para cada uno de Ustedes. Este foro estará habilitado toda la semana y en el se discuten algunos aspectos de interés de la clase, es evaluado, y tienes hasta el inicio de la próxima clase para contestar lo que allí se te pregunta. Ve al foro de Introducción a los números complejos.
No me queda más que despedirme esperando haber logrado en Ustedes el aprendizaje que esperaba. Animo, y si algo no lo entienden, les pido que se comuniquen conmigo a través de la mensajería interna del aula digital o de mi correo electrónico: marlon.leiva@udb.edu.sv, estaré pendiente de sus dudas o inquietudes. Nos vemos en la próxima sesión. Hasta Pronto.
Ing. Marlon Leiva Garay
Última modificación: Thursday, 11 de November de 2021, 14:20
◄ Guía Didáctica
Ir a...
Módulo: Los Números Complejos ►
INFO
Política de Privacidad
Página Oficial UDB
UDB Virtual
Soporte Técnico
Portal Web
CONTÁCTANOS
Ciudadela Don Bosco, Soyapango, San Salvador.
Phone : (503) 2251-8253
E-mail : udbvirtual@udb.edu.sv
GET SOCIAL
Copyright © 2021 - UDB Virtual
Descargar la app para dispositivos móviles


AulaDigital
SOPORTE TÉCNICO
ESPAÑOL - INTERNACIONAL (ES)
Álgebra Vectorial y Matrices MAE
Página Principal / Mis asignaturas / PROYECTOAVM001 / Unidad No. 1: Números Complejos Clase 2 / Clase 2: Operaciones con Complejos: División de complejos. Potencias de "i" y Raíces cuadradas de cantidades negativas.
Clase 2: Operaciones con Complejos: División de complejos. Potencias de "i" y Raíces cuadradas de cantidades negativas.
!Hola! Sean todos bienvenidos a nuestra segunda clase, espero que hayan tenido la oportunidad de leer todo el material que corresponde a la segunda clase, así que siéntete bienvenido a este espacio de aprendizaje. Iniciamos.
Iniciamos retroalimentando la clase anterior.
Recordemos como realizar la división de números complejos en forma binomial.
Cociente:
Si está en forma binómica:
Ejemplo:
Veamos unos ejemplos:
Efectuar: a) $\frac{12+3i}{3-5i}$ b) $\frac{-1+4i}{i}$ c) $\frac{1}{1+i}$
Solución:
a) $\frac{12+3i}{3-5i}$
$\frac{12+3i}{3-5i}\cdot\frac{3+5i}{3+5i}=\frac{(12+3i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}=\frac{21+69i}{3^2+5^2}=\frac{21+69i}{34}=\frac{21}{34}+\frac{69}{34}i$
b) $\frac{-1+4i}{i}$


Marlon Arnoldo Leiva Garay
AulaDigital
SOPORTE TÉCNICO
ESPAÑOL - INTERNACIONAL (ES)
PROYECTOAVM001
Participantes
Insignias
Competencias
Calificaciones
General
Generalidades
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 1
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 2
Unidad No. 1: Números Complejos Clase 3
Página Principal
Área personal
Calendario
Archivos privados
Mis asignaturas
CAIS012021C02G12T
AVMS012021C02G03T
AVMS012021C02G05T
ALLS112021C02G01T
PROYECTOAVM001
UDB Virtual
Álgebra Vectorial y Matrices MAE
Página Principal / Mis asignaturas / PROYECTOAVM001 / Unidad No. 1: Números Complejos Clase 3 / Clase 3: Soluciones Complejas
Clase 3: Soluciones Complejas
¡Saludos a todos! Que alegría que estén de nuevo en esta jornada de estudio. Hoy nos tocará ver la aplicación de números complejos en la solución de ecuaciones polinómicas. Este tema requiere del manejo de algo que ya han aprendido antes como lo son los casos de factoreo, así que los estudiaremos en el desarrollo del tema por si alguno los ha olvidado ya, vamos juntos por más, ¡¡¡adelante!!!
Al escuchar la frase soluciones complejas, se viene a la mente algo difícil pero no es así, se refiere a soluciones de ecuaciones en donde algunas o todas sus raíces o soluciones son números complejos, por eso el nombre "Soluciones Complejas".
DISCRIMINANT
$b^2-4ac>0$ 2 real roots
$b^2-4ac=0$ 1 real root
$b^2-4ac<0$ 2 complex roots
SOLUCIONES COMPLEJAS DE ECUACIONES POLINÓMICAS.
Soluciones Complejas
Cuando resolvemos la ecuación cuadrática $x^2+7x+12=0$ ya sea por factorización o por la fórmula general obtenemos como raíces o soluciones a esta

DOCUMENTOS ELABORADOS

<table>
<tr><td></td><td>

Universidad don Bosco

Departamento de Ciencias Básicas
Modalidad: Clase Virtual
Asignatura: Algebra Vectorial y Matrices

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Guía Didáctica

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Orientaciones Académicas:

Asignatura:
Algebra Vectorial y Matrices
AVM501

Grupo: 03

Horario de clases:
Lunes y Miércoles de 7:00 a 9:00 AM

Coordinador de Cátedra:
Lic. Luis Alonso Arenivar
e-mail: Luis.arenivar@udb.edu.sv

Docente:
Ing. Marlon Leiva Garay
e-mail: Marlon.leiva@udb.edu.sv

Ciclo 01-2022

</td></tr>
</table>

1. Fundamentación de la Materia

Apreciado Estudiante, en esta guía didáctica encontrarás lineamientos básicos y útiles sobre la materia de Algebra Vectorial y Matrices que te corresponde llevar en el presente ciclo de manera virtual. La materia es parte de las materias básicas de las carreras de ingeniería, la cual consta de 5 unidades valorativas, y es requisito para materias de tu formación académica,

El curso consta de 4 unidades, según se muestra a continuación:

Unidad	Nombre Unidad
1	**Los Números Complejos**
2	**Matrices y Determinantes**
3	**Geometría Analítica**
4	**Vectores en el Plano y el Espacio**

Esta asignatura ha sido diseñada para un curso de introducción al álgebra vectorial y matricial. De acuerdo con la temática la asignatura se ha dividido en 4 unidades.

En la unidad I se abarcan los temas que lleven a la comprensión y el uso de números complejos, necesario para resolver algunas ecuaciones con soluciones complejas.

La unidad II, Matrices y determinantes, se desarrollan plenamente las matrices con sus operaciones y propiedades, se dedica atención especial a las matrices cuadradas y a sus inversas. Los determinantes se desarrollan en forma sistemática. Esta unidad termina con el estudio de ecuaciones lineales simultaneas y sus aplicaciones.

En la Unidad III se estudia las gráficas y las ecuaciones de rectas y cónicas; el desarrollo de métodos algebraicos de solución de problemas, y en la Unidad IV, se trata del estudio de vectores tanto en el plano como en el espacio, se define el producto punto y el producto cruz o vectorial para el cálculo de áreas, volúmenes y otros aspectos de interés del algebra vectorial.

2. Objetivos Generales y Específicos

Objetivo General

Aplica matemáticas y ciencias asociadas a ingeniería para el planteamiento y resolución de problemas.

Objetivos Específicos

- Aplica métodos de resolución de sistemas de ecuaciones para dar solución a diferentes problemas de ingeniería.
- Grafica cónicas a partir de sus elementos para visualizarlo en el plano.
- Grafica vectores en el espacio para el cálculo de áreas y volúmenes.

3. Contenidos a desarrollar

<u>Unidad I: Los números Complejos</u>

1. Definición de números complejos.
2. Operaciones (Suma, resta y producto) con complejos.
3. Igualdad de números complejos.

4. Plano complejo.
5. Módulo, conjugado y opuesto de un número complejo.
6. Cociente de números complejos.
7. Potencias de “i”.
8. Raíces cuadradas de cantidades negativas.
9. Soluciones Complejas.
10. Los números Complejos en Forma Trigonométrica.
11. División y producto de números complejos en forma trigonométrica.
12. Potencias de números complejos en forma trigonométrica.
13. Raíces cuadradas de números complejos en forma trigonométrica.

Unidad II: Matrices y Determinantes

1. Definición de Matriz.
2. Tipos de matrices.
3. Igualdad de matrices.
4. Operaciones con matrices.
5. Potencia de una matriz cuadrada.
6. Definición de determinantes.
7. Propiedades de los determinantes.
8. La matriz inversa.
9. La matriz adjunta.
10. Operaciones elementales de fila.
11. Ecuaciones matriciales.
12. Matrices escalonadas.
13. Rango de una matriz.
14. Sistemas de Ecuaciones lineales (SEL).
15. Problemas de aplicación que conducen a un SEL.

Unidad III: Geometría analítica

1. Sistema coordenado de dos dimensiones.
2. Distancia entre puntos en el plano cartesiano.
3. División de un segmento en una razón dada.
4. Pendiente de una recta.
5. Rectas paralelas y perpendiculares.
6. Angulo entre rectas.
7. La línea recta.
8. Ecuación general de la línea recta.
9. Distancia de un punto a una recta.
10. Las cónicas como lugar geométrico.
11. La Circunferencia.
12. La Parábola.
13. La Elipse.
14. La Hipérbola.

Unidad IV: Vectores en el plano y el espacio

1. Vectores en el plano (R2) y el espacio (R3).
2. La esfera. Ecuaciones.
3. Vectores.
4. Combinación lineal de vectores.
5. Algebra vectorial.
6. Producto punto.
7. Angulo entre vectores.
8. Vectores paralelos y ortogonales (Perpendiculares).
9. Cosenos directores y ángulos de dirección.
10. Proyecciones.
11. Producto vectorial o producto cruz.
12. Triple producto escalar.
13. Dependencia e independencia lineal.

4. Metodología de trabajo

Este curso será desarrollado con el apoyo de la plataforma Moodle. El uso de este entorno virtual permitirá llevar a cabo procesos de aprendizaje, la organización y la comunicación entre los miembros del curso. Se accede a la plataforma por medio del siguiente enlace:

https://www.udbvirtual.edu.sv/auladigital/login/index.php

Es importante señalar que los estudiantes deben contar con los siguientes requisitos para el acceso a la plataforma de aprendizaje en línea:

- Nombre de usuario y contraseña.
- Correo electrónico institucional.
- Acceso a una computadora o dispositivo que le permita acceder al curso virtual.
- Micrófono, Audífonos o bocinas.
- Conexión estable y constante a Internet.
- Disponer de tiempo necesario para participar en los encuentros sincrónicos establecidos por el docente.

El desarrollo del curso es a distancia con apoyo en la plataforma de Aprendizaje en línea Moodle en la que se tiene el foro académico, foro de consulta, las guías de clase para tema en cada unidad, tutorías virtuales, tareas y evaluaciones.

También se podrá contar con otros recursos de apoyo que sirva como proceso de enseñanza y aprendizaje en la adquisición de los conocimientos relacionados con el curso.

Las tutorías (virtuales) son importantes en la formación de los estudiantes para afianzar los contenidos y el dominio de la materia. Este curso consta con tutorías virtuales semanales que se desarrollarán en el encuentro sincrónico semanal, respecto a las tutorías virtuales, estas se harán semanalmente, dos veces por semana, según el horario de clase que los estudiantes tengan, como ejemplo para un grupo de clase le tutoría virtual, el encuentro sincrónico serán los días martes y jueves de 7:00 a 9:00 am, durante las 16 semanas que dura el ciclo, a excepción de los días que haya actividad de examen corto o parcial, que no se tendrá la tutoría sincrónica con los estudiantes; con otros grupos los horarios pueden ser: Lunes y Miércoles de 9:00 a 11:00 AM, como mencioné antes dependerá del horario de clase de cada grupo, así será el día y hora de su tutoría virtual.

Las clases estarán habilitadas desde el día sábado a la 1:00 pm con el objeto de dar tiempo a los estudiantes para leer previamente los apuntes de clase sobre la que versará el encuentro sincrónico; se subirá el material que se estará estudiando durante la semana, según su horario de clases, del cual ya se habló previamente.

La comunicación con los estudiantes será constante y fluida, haciendo uso de diversos medios de comunicación, principalmente la mensajería interna del aula digital, además del correo electrónico del docente.

La entrega de tareas se hará en los días y horas que se haya estipulado en el aula virtual, y lo enviarán a través del aula digital o del correo electrónico, dependerá del lugar por el que el docente escoja para su entrega y revisión, también la devolución de los trabajos o tareas se harán por el mismo medio de envío. Dentro de los trabajos se verificará que los ejercicios solicitados estén bien hechos su solución, en orden y claridad, además de verificar la ortografía en la elaboración de conclusiones. No se admitirá trabajos plagiados. En caso que los estudiantes no cumplen con la entrega de alguna tarea o actividad evaluada, deberá informar al tutor o docente el porqué del incumplimiento, en el caso de ser una razón justificada se seguirá el manual institucional sobre la entrega de tareas de manera tardía, según el manual de convivencia que todos los estudiantes de la Universidad poseen entre sus materiales de inicio de ciclo; en el caso de no tener constancia válida o de no presentar oportunamente la constancia de su incumplimiento se le asignara la nota de 0.0 en la evaluación perdida. .

El estudiante adquiere un rol autorregulado y analítico, lo cual le permitirá familiarizarse poco a poco con las exigencias de una llevar una materia en modo virtual. Se espera que desarrolle por su cuenta los temas incluidos en las guías de clase, que los lea antes de los encuentros sincrónicos para cumplir con los objetivos del curso, posteriormente el docente guiará a los estudiantes en el proceso de evaluación formativa a través de diferentes actividades como toma de apuntes de clase, puntualidad y resolución de guías de ejercicios.

5. Evaluación del aprendizaje

La evaluación en el curso virtual tendrá un componente formativo y otro sumativo, para lograr obtener una calificación al final del curso.

La parte formativa tendrá la ponderación del 5% de la nota de cada periodo y esta nota se obtendrá de los siguientes aspectos constatados por el docente:

- Asistencia puntual de los estudiantes a los encuentros sincrónicos.
- Participación de los estudiantes en el desarrollo de la clase sincrónica.
- Toma de apuntes y participación en el desarrollo de ejercicios y guías de estudio.

La evaluación sumativa implicará el resto de las actividades que se dejarán como tareas ex aula, así:

- **Participación de foro de consulta   0%**

Este foro estará habilitado durante todo el ciclo y se utilizará para que los estudiantes consulten y hagan preguntas al docente o a sus compañeros relativos a los temas que se estén desarrollando en la clase, el propósito de este foro es fomentar la participación y la comunicación con todos los miembros del curso.

- **Participación en foro Académico   5%**

Este foro tiene como propósito que los estudiantes contesten preguntas que docente hace respecto a diversos tópicos que se están viendo en clase o a ejercicios que éste proponga durante la clase. La o las pregunta(s) de estos foros estarán disponibles en la plataforma; deberá contestar de manera concreta y discutir los comentarios al respecto con sus compañeros y profesor, así de esta manera aclarará sus dudas con respecto al tema.

Debe de participar al mínimo en dos ocasiones, en diferentes días. Si solo participa un día o hace las dos participaciones el mismo día, tendrá solo derecho a un 50 % de la calificación.

- **Trabajos Individuales 5%**

Estas se llevarán a cabo según la calendarización que se halla establecido para ello desde el inicio del ciclo. No se debe olvidar acatar todas las instrucciones que se brinden en cada tarea para lograr el mayor porcentaje posible.

- **Trabajo Grupal 15%**

Los trabajos grupales se estipulan desde el inicio de cada periodo de clases en el ciclo, y la conformación de los grupos de 4 o 5 estudiantes queda a criterio de cada uno de los estudiantes, ellos conforman sus equipos de trabajo; el trabajo serán la resolución de algunos ejercicios relativos a los temas que se estén desarrollando en los que tendrá que hacer una pequeña investigación para completar los ejercicios. Debe acatar todas las instrucciones establecido en el trabajo para evitar disminución en el porcentaje obtenido.

- **Examen Corto Individual 15%**

Es un examen que se hará a través de la plataforma Moodle, la cual consistirá en elaborar unos 3 ejercicios de los temas recientemente vistos en clase y que serán resueltos en cierto tiempo estipulado en las indicaciones del examen y enviarán a través de la plataforma la solución de dichos ejercicios al docente que se encargará de corregirlos y enviar su respectiva calificación a través del mismo medio de envío.

- **Examen Parcial Individual 60%**

Este examen es el de más duración, y se resolverán 5 o 6 ejercicios de los temas desarrollados en el periodo, y deberá resolverlos y enviar en formato PDF a través del aula digital al docente para ser corregidos y enviada la calificación por el mismo medio. Los demás detalles de la evaluación están en las indicaciones de la evaluación.

Esto totaliza el 100% de la nota de cada periodo en el ciclo. Hay que tener presente que son 3 periodos por ciclo; el primero tiene un porcentaje del 30% de la nota global de la asignatura, el segundo y el tercer periodo tienen una ponderación del 35% de la nota global, lo que en suma nos da el 100% con los 3 periodos. **La nota mínima para aprobar es 6.0**

6. Cronograma de trabajo

PLANIFICACIÒN RESUMIDA DE ÀLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES-AVM501

SEMANA 1: Del 26/07 al 30/07		SEMANA 2: Del 09/08 al 14/08		SEMANA 3: Del 16/08 al 21/08	
SESIÓN 1	**SESIÓN 2**	**SESIÓN 1**	**SESIÓN 2**	**SESIÓN 1**	**SESIÓN 2**
UNIDAD 1: NÚMEROS COMPLEJOS. *Números Complejos. *Suma, resta y producto de números complejos. **ASIGNACION DEL TRABAJO COOPERATIVO. 1 (15%).**	*Igualdad de números complejos. *Plano complejo. *Módulo, conjugado y opuesto de un número complejo.	*Cociente de números complejos. *Inverso multiplicativo *Potencias de la unidad imaginaria. *Raíces cuadradas de cantidades negativas. * Soluciones Complejas de ecuaciones polinómicas.	* Los Números Complejos en Forma Trigonométrica. Notación. *Forma polar de números complejos. **Tarea Individual**	* Producto y Cociente de números complejos en forma Trigonométrica. * Producto y Cociente de números complejos en forma Polar.	* Teorema de De Moivre. *Potencia de un número complejo en forma trigonométrica y polar. * Raíz n-ésima de un número complejo. **Examen Corto**
VIDEO 1 VIDEO 2	VIDEO 3	VIDEO 4	VIDEO 5	VIDEOS 6,7,8,9	VIDEOS 10,11
SEMANA 4: Del 23/08 al 28/08		**SEMANA 5: Del 30/08 al 04/09**		**SEMANA 6: Del 06/09 al 11/09**	
SESIÓN 1	**SESIÓN 2**	**SESIÓN 1**	**SESIÓN 2**	**SESIÓN 1**	**SESIÓN 2**
UNIDAD 2: MATRICES Y DETERMINANTES. *Matriz: tipos de matrices, igualdad de matrices. *Operaciones con matrices: suma, resta y producto. *Potencia de una matriz. *Definición de determinante de una matriz cuadrada.	* Cálculo de determinantes y propiedades. *Matriz inversa- Métodos: matriz adjunta y operaciones elementales de fila.	*Ecuaciones matriciales. *Matrices escalonadas. *Rango de una matriz. **CLASE ASINCRÒNICA GRABADA-VIDEO**	**EXAMEN ESCRITO 1 (20%) Temario: Unidad 1 completa. Unidad 2 hasta los temas de la sesión 1 de la semana 5.**	*Teorema de Rouche-Frobenius. *Sistemas de ecuaciones lineales: compatibles e incompatibles.	*Métodos de solución matricial de SEL: -Matriz inversa. -Operaciones elementales de fila. -Regla de Cramer. *Problemas de aplicación.
VIDEOS	VIDEOS 17,18,19,20	VIDEOS 21,22,23,24,25		VIDEO 26	VIDEOS 27,28,29

7. Presentación del Tutor

Ing. Marlon Arnoldo Leiva Garay

Profesor de Matemática e Ingeniero en sistemas y Computación con mas de 30 años de experiencia docente. Actualmente docente del departamento de ciencias básicas de la Universidad don Bosco de El Salvador, impartiendo las siguientes cátedras: Algebra Vectorial y Matrices, Algebra Lineal, Matemática I, Cálculo diferencial y Cálculo Integral. También soy docente del área informática, brindo mis conocimientos a estudiantes de bachillerato en la especialidad de Infraestructura Tecnológica y Servicios Informáticos, trabajando para el Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de El Salvador en el Instituto Nacional General Francisco Morazán

En la actualidad estoy cursando la Maestría de Entornos Virtuales de Aprendizaje en el Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente en convenio con la Universidad Francisco Gavidia de El Salvador.

Es mi deseo que cada uno de Ustedes aproveche al máximo esta oportunidad de aprender y ser cada día un mejor estudiante y por ende un mejor profesional. Los insto a que pongan el mayor de sus esfuerzos en hacer cada una de las actividades del presente curso, de participar en los foros, de compartir sus dudas e inquietudes que no dudo que entre todos aclararemos, espero que este curso sea otro ma´s de tus éxitos ganados.

Los espero en clase, atentamente:

Ing., Marlon Leiva Garay
Docente

Universidad don Bosco de El Salvador

Departamento de Ciencias Básicas
Algebra Vectorial y Matrices

“Los Números Complejos”

Ing. Marlon Leiva Garay

Contenidos

LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

1. Los números complejos. Introducción

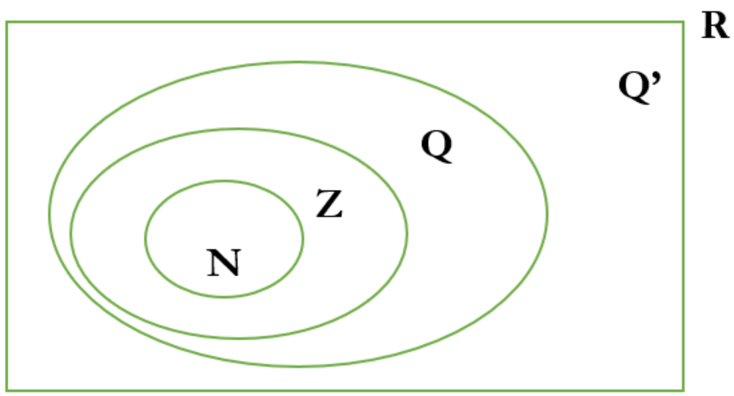
El ser humano, a lo largo de su desarrollo académico, se ve expuesto a los sistemas numéricos. Comenzando por los números con los que, de manera natural, comienza a contar, así: 1, 2, 3, 4, etc., ¡los números naturales! (**N**). (no entiendo por qué el punto y la C están en rojo)

Al ir avanzando se tuvo la necesidad de representar cantidades que no estaban en el conjunto de los naturales, se necesitaba representar: la ausencia de cantidad, cantidades inferiores de cero, por ejemplo, eso concluyó en concebir el conjunto de los números enteros (**Z**).

Este conjunto, los enteros, tiene sus limitantes, pues en la naturaleza, en la vida real, no todo se presenta en cantidades enteras, de hecho, ¡casi todo viene en fracciones!!!, de ahí el nombre del siguiente conjunto: Los números fraccionarios o quebrados, también llamado los Números Racionales (**Q**). Los números racionales son un gran apoyo en los cálculos matemáticos, de una manera sencilla podemos decir que un número es racional si este se puede escribir como una fracción indicada de un número sobre otro, así: el número 1 lo puedo reescribir como 2/2, 50/50, etc. De igual manera, el número 0.50 equivale a ½, 0.75 equivale a ¾, etc. por lo tanto, estos números son racionales. Aún más 0.3333333…. lo podemos reescribir como 1/3. Pero se presentó un problema, existen algunos números decimales que no se pueden reescribir como una fracción común, a estos números se les dio el nombre de Números Irracionales (**Q'**), ejemplos de estos números son: π, e, $\sqrt{2}$, etc.

De la unión de los conjuntos de los Números Racionales con los Números Irracionales obtenemos el conjunto de los Números Reales (**R**), que son todos los números que hemos utilizado hasta el día de hoy, todos los que hemos usado en nuestros estudios anteriores, han sido números reales.

Esta breve descripción de los conjuntos numéricos lo podemos representar en el siguiente diagrama:



Estos números fueron suficientes hasta que se tuvo que dar solución a problemas en los que se debe calcular la raíz cuadrada de una cantidad negativa, por ejemplo: $\sqrt{-4}$. De acá la necesidad de expandir el conjunto de números reales.

Es conocido como resolver ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo:

Ejemplo 1. Resolver $x^2 + 1 = 0$.

Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales, ya que:

$x^2 + 1 = 0$ Despeja la variable

$x^2 = -1$ Extrae raíz cuadrada a ambos lados de la

ecuación $\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

¿Cuál es el resultado de extraer raíz cuadrada de -1?

Entonces; ¿cómo resolver este tipo de ecuaciones? Afortunadamente la solución es sencilla e ingeniosa.

1.1 La Unidad Imaginaria

En 1,777, el matemático suizo Leonhard introdujo el símbolo i para representar la unidad imaginaria, denominó al valor $\sqrt{-1}$ como la **unidad imaginaria (i),** entonces, reescribimos la ecuación anterior y tenemos:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-1}$$

$$\boldsymbol{x = \pm\, i}$$

A partir de ahora el valor **i =** $\boldsymbol{\sqrt{-1}}$ se denominará la **Unidad Imaginaria**.

Otra forma de escribir la unidad imaginaria es: $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Ejemplo 2. Resolver $x^2 + 25 = 0$

$x^2 + 25 = 0$ Despejando "$\boldsymbol{x}$"

$x^2 = -25$ Extraer raíz cuadrada a ambos términos de la ecuación

$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)(25)}$ Aplicando propiedad de radicales: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$x = \pm\sqrt{-1} \pm \sqrt{25}$

$x = \pm(i * 5)$ Sustituyendo $\sqrt{-1}$ por **i**, la unidad imaginaria.

$\boldsymbol{x = \pm 5i}$

Ejemplo 3. Resolver $x^2 + 7x + 12 = 0$

Esta es una ecuación cuadrática que podemos resolver de dos maneras diferentes: Utilizando factorización o por la fórmula general.

En el primer caso debemos recordar cómo resolver trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$, cuando **a,** el termino que acompaña a la $\boldsymbol{x^2}$ sea 1 o diferente de 1.

En el segundo caso utilizaremos la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, esta es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo haremos por factorización, así:

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(x + 4)(x + 3) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \vdots \quad x + 3 = 0$$

$$x_1 = -4 \ \wedge \ x_2 = -3$$ **¡¡Ambas raíces son reales!!**

Ejemplo 4. Resolver $x^2 + 6x + 13 = 0$

$x^2 + 6x + 13 = 0$

En la ecuación: $x^2 + 6x + 13 = 0$; $a = 1,\ \ b = 6\ \ y\ \ c = 13.$

Sustituyendo en la fórmula general

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2}$$

La última fracción toma dos caminos, uno siguiendo el signo "**+**" y el otro siguiendo el signo "**–** ", así:

$$x_1 = \frac{-6+4i}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-6-4i}{2}$$

Luego:

$$\boldsymbol{x_1 = -3 + 2i} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x_2 = -3 - 2i}$$

En las raíces anteriores, los números imaginarios son: **2i** y **-2i.**

Las combinaciones de estos números imaginarios con números reales dan como resultado los denominados: **Números Complejos**, de los cuales hablaremos en detalle a continuación.

1.2 Definición de Números Complejos

Si **a** y **b** son números reales cualesquiera, se define un número complejo **z**, siendo **z=a + bi**

Al valor "**a**" se le denomina **la parte real** y al valor "**b**" se le conoce como **la parte imaginaria**.

En lenguaje matemático, podemos definir el conjunto de los Números Complejos así:

$$\boldsymbol{C} = \left\{ \boldsymbol{a + bi \,/\, a \;\; y \;\; b \;\; \in R; i = \sqrt{-1}} \right\}$$

Ejemplos de números complejos son:

- **3-2i** La parte real es 3 y la imaginaria es -2
- $-\frac{1}{2}$**+4i** La parte real es $-\frac{1}{2}$ y la imaginaria es 4
- **-3i** La parte real es 0 y la parte imaginaria es -3
- **7** La parte real es 7 y la imaginaria es 0

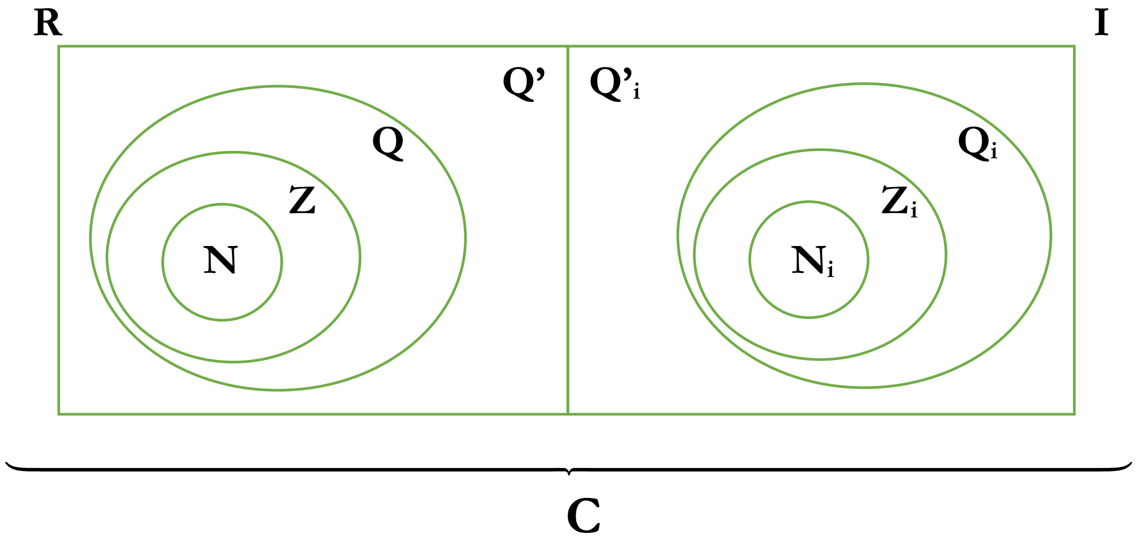
Observe que la parte imaginaria es únicamente el número que acompaña a la "i"

Es interesante destacar que todo real es un complejo, ya que éste se puede escribir en la forma **a+bi.** Podemos decir: **R** ⊂ **C**, lo que se lee: "Los reales están incluidos en los complejos"

Por ejemplo, el número real, **7** se puede expresar como un número complejo en su forma binaria, así: **7 + 0i**.

También es necesario destacar que un número imaginario, llamado imaginario puro, **bi** puede reescribirse como un número complejo en su forma binomial, así, por ejemplo, el número **5i** se puede reescribir como: **0 + 5i**.

Podemos hacer uso del siguiente esquema para interpretar lo que acabamos de plantear.



De este esquema podemos intuir que cada número real tiene su "igual" imaginario. Podríamos considerar que los números imaginarios son la "imagen" de los números reales, y la unión de los elementos de ambos conjuntos constituyen el conjunto mas grande de números, los **Números Complejos** (**C**)

2. Operaciones con Números Complejos

En los números complejos, como sistema de numérico, sus elementos se pueden operar entre sí.

Cabe mencionar que el conjunto de números complejos es un campo[3] de números cerrado, es decir que, al operar un par de elementos complejos, el resultado será también un complejo.

Como se puede intuir, los números complejos, al igual que los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia y extraerles raíces. Lo cual veremos a continuación.

Fíjate que lo que sigue está en un tipo de fuente distinta a lo anterior. Por favor, unifica la misma fuente y tamaño en todo el documento

2.1 Suma de Complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, Entonces $z_1 + z_2$ es:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

En palabras comunes, "**la suma de dos números complejos se obtiene sumando la parte real de uno de los números con la parte real del otro, y la parte imaginaria de uno con la parte imaginaria del otro**".

Ejemplo 5. Dados: $z_1 = -1 + 2i \quad y \quad z_2 = 7 - 5i$, efectuar: $z_1 + z_2$

La parte real:	La parte imaginaria:
$-1+7$ 6	$2i+(-5i)$ $2i-5i$ $-3i$

Entonces: $\boldsymbol{z_1 + z_2 = 6 - 3i}$

Ejemplo 6. Efectuar: $\left(-\frac{3}{4} - 8i\right) + (\frac{1}{4} + 2i)$

Luego tenemos:

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + (-8+2)i$$
$$-\frac{1}{2} + (-6)i$$
$$\boldsymbol{-\frac{1}{2} - 6i}$$

Ejemplo 7. Efectuar: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$
$$\frac{3}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

Después de racionalizar obtenemos:

$$\boldsymbol{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

2.2 Resta de Complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, Entonces $z_1 - z_2$ es:

$$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$$

En palabras comunes, "**la resta de dos números complejos se obtiene restando la parte real de uno de los números con la parte real del otro, y la parte imaginaria de uno con la parte imaginaria del otro**".

Ejemplo 8. Dados: $z_1 = \frac{2}{5} - i$ y $z_2 = \frac{1}{2} - 4i$, efectuar: $z_2 - z_1$

$$z_2 - z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \big(-4 - (-1)\big)i$$

$$\boldsymbol{z_2 - z_1 = \frac{1}{10} - 3i}$$

Ejemplo 9. Efectuar: $(-2+3i)+(4-2i)-(5-9i)$

Sumamos los primeros dos números

$(-2+4)+(3-2)i$

$2+i$

Ahora efectuamos la resta:

$(2+i)-(5-9i)$
$(2-5)+\big(1-(-9)\big)i$
$\boldsymbol{-3+10i}$

Es necesario hacer notar que los números complejos cumplen ciertas propiedades por tratarse de un sistema numérico.

Ya mencionamos que los números complejos cumplen la **ley de cierre o cerradura**, es decir que, al operar, en nuestro caso sumar o restar, números complejos, se obtiene otro complejo, como lo podemos verificar en cada una de las respuestas obtenidas en los ejemplos anteriores.

También se debe destacar que la suma de complejos es **Conmutativa**, esto quiere decir que el orden de los sumandos no altera el total o la suma, es decir:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

No así la resta, la resta o sustracción de números complejos **NO** es **Conmutativa**, es decir:

$$z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$$

Una propiedad de los números complejos que es importante, y no queremos dejar de lado es la llamada **Propiedad del elemento neutro**, esta propiedad es aquella que establece que dentro del conjunto de números existe un elemento que tiene la característica de que, al operarlo con otro número, el resultado sigue siendo el mismo número. Para la suma de complejos, el elemento neutro es $\boldsymbol{0+0i}$.

Por ejemplo, Al efectuar: $(9-3i)+(0+0i)$, Obtenemos: $9-3i$, ya que:

$= (9+0)+(-3+0)i = 9-3i$, que resulta ser el mismo número!!!

Coloca el signo de apertura porque es así como se utiliza en castellano

La última propiedad que quiero resaltar es la denominada **Propiedad del elemento inverso o recíproco**, esta propiedad establece que para cada elemento del conjunto existe un elemento inverso tal que al operarlo con el número original nos da como resultado el elemento neutro de dicha operación. A ver, en nuestro caso estamos hablado de la operación suma de complejos, entonces si $z = a + bi$, entonces, ¿existe otro número, denominado $z_r = x + yi,$ tal que: $z + z_r = 0 + 0i$?

$$z + z_r = (a + bi) + (x + yi) = 0 + 0i$$
$$= (a + x) + (b + y)i = 0 + 0i$$ De acá obtenemos:

$$a + x = 0 \qquad y \qquad b + y = 0$$ Por igualdad de números complejos

Entonces:

$$x = -a \qquad y \qquad y = -b$$ Por lo tanto, el número $\boldsymbol{z_r}$ es:

$z_r = -a - bi,$ Este número es el inverso aditivo de $\boldsymbol{z}$

Por ejemplo, el inverso aditivo de: a) $3 + 4i \; es - 3 - 4i$

b) De $-2 + \frac{1}{2}i \;\; es \;\; 2 - \frac{1}{2}i$

c) De $1 + i \; es - 1 - i$

y así sucesivamente, ya que, al sumar cada pareja entre sí, obtendremos, sin excepción $0 + 0i$.

En el caso de la suma de complejos, al inverso aditivo se le conoce simplemente como el **Opuesto** de dicho número. Existen tantos números opuestos como números complejos, un opuesto para cada número, por lo tanto, hay infinitos números inversos.

2.3 El producto o Multiplicación de Complejos

La multiplicación de dos números complejos debe realizarse como si se tratase del producto de dos polinomios, así:

Sean: $z_1 = a + bi \quad y \quad z_2 = c + di,$ entonces $z_1 . z_2 = (a + bi)(c + di)$

Utilizando el algoritmo de solución para encontrar el producto de polinomios, tenemos:

$$z_1 . z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$

$z_1.z_2 = ac + adi + bci + bd(-1)$ Sustituyendo $i^2\ por - 1$.

$z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ Agrupando términos semejantes, Reales con

Reales e imaginarios con imaginarios.

Ejemplo 10. Efectuar: $(11 + 4i)(1 - i)$

$$= 11 - 11i + 4i - 4i^2$$
$$= 11 - 11i + 4i - 4(-1)$$
$$= 11 - 11i + 4i + 4$$
$$= (11 + 4) + (-11 + 4)i$$
$$= \mathbf{15 - 7}\boldsymbol{i}$$

Ejemplo 11. Dados $z_1 = 6 - 2i,\ \ z_2 = 9 + 7i\ \ y\ \ z_3 = -1 + 5i$

Calcular: $(z_2 + z_1)(z_3 - z_2)$

$$z_2 + z_1 = (9 + 6) + \big(7 + (-2)\big)i = 15 + 5i$$
$$z_3 - z_2 = (-1 - 9) + (5 - 7)i = -10 + (-2)i = -10 - 2i$$
$$(z_2 + z_1)(z_3 - z_2) = (15 + 5i)(-10 - 2i)$$
$$= -150 - 30i - 50i - 10i^2$$
$$= -150 - 30i - 50i + 10$$
$$= \mathbf{-140 - 80}\boldsymbol{i}$$

Tenemos que hacer notar que la operación producto en el conjunto de los números complejos es **Conmutativa**, es decir:

$$z_1.z_2 = z_2.z_1$$

La operación producto de complejos posee **Elemento neutro**, llamado también **Elemento identidad** y es: $\mathbf{1 + 0}\boldsymbol{i}$, ya que la multiplicar un número complejo cualesquiera por $\mathbf{1 + 0}\boldsymbol{i}$, nos da de resultado el mismo número.

Por, ejemplo $(2 + 4i)(1 + 0i) = 2 + 4i$, ya que: $= (2)(1) + (2)(0i) + (4i)(1) + (4i)(0i)$
$= 2 + 0 + 4i + 0 = 2 + 4i$

3. Igualdad de números complejos

¿Cuándo dos números complejos son iguales?

La respuesta a esta pregunta es sencilla: "Cuando la parte real de uno es igual a la parte real del otro, y la parte imaginaria de uno es igual a la parte imaginaria del otro".

En lenguaje matemático:

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, Entonces se dice que $z_1 = z_2$ sí y solo si:

$$a = c \qquad y \qquad b = d$$

Nótese que estamos utilizando la **forma binomial** de un número complejo para expresarlos

Ejemplo 12 Dados $z_1 = \sqrt{4} - 3i \quad y \quad z_2 = 2 - \left(\frac{6}{2}\right) i$, Determine si $z_1 = z_2$

Para que $z_1 = z_2$ se debe cumplir que:

$\sqrt{4} = 2 \qquad y \qquad -3 = -\frac{6}{2}$

Ambas igualdades son ciertas, por lo tanto, podemos concluir que:

$$\boldsymbol{z_1 = z_2}$$

Ejemplo 13. Encuentre el valor de "**x**" y "**y**" en la siguiente igualdad:

$x + 2i = -5 + yi$

En este caso tenemos: $x = -5 \quad y \quad 2 = y$, por lo tanto, la respuesta sería:

$$\boldsymbol{x = -5 \quad y \quad y = 2}$$

Ejemplo 14. Halle los valores de m y n para que la igualdad se cumpla

$(2m - n) + (m + 2n)i = i$

Procedemos a igualar arte real con real e imaginaria con imaginaria, así:

$2m - n = 0 \qquad y \qquad m + 2n = 1$

Observe que el número complejo de la derecha es un imaginario puro cuya parte real es cero.

Despejamos m de la primera ecuación, así.

Despejamos m de la primera ecuación, así.

$2m - n = 0$
$2m = n$
$m = \frac{n}{2}$

Ahora sustituimos m en la otra ecuación, así:

$m + 2n = 1$

$$\frac{n}{2} + 2n = 1$$
$$\frac{5}{2}n = 1$$
$$n = \frac{1}{\frac{5}{2}}$$
$$n = \frac{2}{5}$$

Ahora que sabemos cuánto vale n encontramos m, sustituyendo en la primera ecuación,

$$m = \frac{n}{2}$$
$$m = \frac{\frac{2}{5}}{2}$$
$$m = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto, tenemos que:

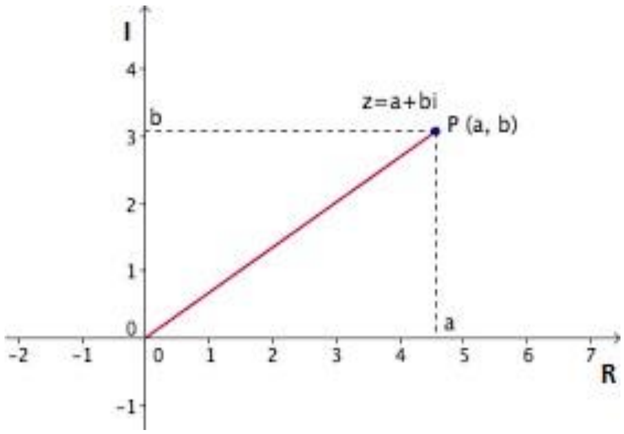
$$\boldsymbol{m = \frac{1}{5} \quad y \quad n = \frac{2}{5}}$$

4. Plano Complejo o Plano de Argand

Al ir evolucionando el estudio de los números complejos, fue necesario hacer una presentación geométrica de dichos números. Para ello se ideó el **plano complejo** o **plano de Argand**, en honor al matemático Jean Robert Argand (1806), el cual, básicamente es el plano cartesiano o plano XY, que está formado por dos ejes que representan a las rectas de números reales, en el caso del plano complejo, se sustituye el eje de las ordenadas o eje "**Y**", por el eje de números imaginarios, así:

Al igual que los números reales representan puntos en las rectas reales, así los números complejos pueden ser ubicados en correspondencia biunívoca con los puntos del plano, del plano complejo, la parte real se representa en el eje de las abscisas o eje "**X**" y la parte imaginaria en el eje "**Y**", de aquí se sobreentiende que un número complejo en la forma $\boldsymbol{a + bi}$, puede representarse como un par ordenado que se ubica en el plano complejo, así:

$$z = a + bi = (a, b)$$



Al representar un número complejo como un par ordenado $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, se le da el nombre de **forma rectangular** de un número complejo.

Nota que al escribir el número complejo en forma rectangular únicamente se escriben los números que forman el número complejo, la parte real en "**x**" y la parte imaginaria en "**y**", es decir, solo el valor $\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{b}$.

Antes de continuar con la división de números complejos debemos ser capaces de encontrar el conjugado de un número complejo, ya que este contenido es necesario dominarlo para poder realizar la división de complejos.

5. Módulo, Conjugado y Opuesto de un número complejo.

<u>Definición</u>

Sea $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ un número complejo, se dice que $\overline{\boldsymbol{z}}$ es su conjugado, si y solo si $\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bi}$.

Si nos fijamos atentamente lo único que cambia de un numero

Ejemplo 15. Determine el conjugado de los siguientes números complejos:

Número Complejo dado	Conjugado del número complejo
$a)\ 43 - 52i$	$a)\ 43 + 52i$
$b) - 74 + 73i$	$b) - 74 - 73i$
$c)\ \sqrt{5} - \sqrt[3]{2}i$	$c)\ \sqrt{5} + \sqrt[3]{2}i$
$d)\ 3i$	$d) - 3i$
$e) - 7$	$e) - 7$

5.1 Propiedad de los números complejos conjugados.

Estudiaremos algunas propiedades de los conjugados de los números complejos.

P1 El conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número complejo

$$\overline{\overline{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{z}$$

P2 El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados

$\overline{\boldsymbol{z_1 + z_2}} = \overline{\boldsymbol{z_1}} + \overline{\boldsymbol{z_2}}$

P3 El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados

$\overline{\boldsymbol{z_1 \cdot z_2}} = \overline{\boldsymbol{z_1}}.\overline{\boldsymbol{z_2}}$

P4 La suma de un número complejo con su respectivo conjugado es igual al doble de la parte real

$\boldsymbol{z + \bar{z}}$ **= Doble de la parte real**

Demostración:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$,

Donde **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria del número complejo, entonces:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) \\ &= (a + a) + (b - b)i \\ &= \boldsymbol{2a} \end{aligned}$$

P5 La resta de un número complejo con su respectivo conjugado es igual al doble de la parte imaginaria.

$\boldsymbol{z - \bar{z}}$ **= Doble de la parte imaginaria**

Demostración:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$,

Donde **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria del número complejo, entonces:

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (a + bi) - (a - bi) \\ &= (a - a) + \big(b - (-b)\big)i \\ &= 0 + (b + b)i \\ &= \boldsymbol{2b} \end{aligned}$$

P6 El producto de un número complejo con su respectivo conjugado es igual a la suma del

Cuadrado de la parte real con el cuadrado de la parte imaginaria.

$\boldsymbol{z \cdot \bar{z}}$ = **El cuadrado de la parte real más el cuadrado de la parte imaginaria**

Demostración:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$, entonces:

$$z \,.\, \bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$
$$= (a)(a) + (a)(-bi) + (bi)(a) - (bi)(-bi)$$
$$= a^2 - abi + abi - b^2 i^2$$
$$= \boldsymbol{a^2 + b^2}$$

Aunque hay otras propiedades más relativas al conjugado de un número complejo, es la última propiedad la que utilizaremos con el fin de agilizar el proceso de dividir números complejos.

5.2 Opuesto de un número complejo

Definición

Sea $\boldsymbol{z = a + bi}$ un número complejo, se dice que **ˉZ** es su OPUESTO, si y solo si **ˉZ**$= \boldsymbol{-a - bi}$.

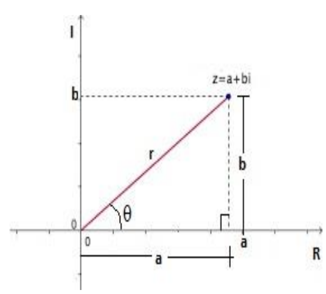
Ejemplo 16. Determine el opuesto de los siguientes números complejos:

a) El Opuesto de $4 - 2i$ es $-4 + 2i$
b) El opuesto de $-74 + 73i$ es $74 - 73i$
c) El opuesto de -5 es 5
d) El opuesto de $3i$ es $-3i$

5.3 Módulo de un Número Complejo

El módulo de un número complejo, también llamado Valor Absoluto de z, se obtiene así:

Hallando el **módulo** de $z = a + bi$



Para ello consideremos el plano de Argand, y podremos observar que al representar el número complejo se forma un triángulo rectángulo.

En este triángulo rectángulo, la distancia $\boldsymbol{r}$, es la hipotenusa de dicho triángulo y los catetos son los valores $\boldsymbol{a}$ (La parte real) y $\boldsymbol{b}$ (La parte imaginaria) del número representado, luego aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos en valor de $\boldsymbol{r}$, que es:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ Este valor recibe el nombre **de módulo o valor absoluto**

Ejemplo 17. Si $\boldsymbol{z = 2 - 3i}$ Hallar su módulo (r)

En este caso a=2 y b= -3, por lo tanto, la operación nos resulta:

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

6.SOLUCIONES COMPLEJAS DE ECUACIONES POLINÓMICAS.

6.1 Soluciones Complejas

Nos gusta iniciar este tema diciendo que lo complejo, se queda en el título, ya que lo que vamos a hacer es resolver ecuaciones polinómicas de segundo, tercer, cuarto, quinto grado, etc., en las que algunas o todas sus raíces, son números complejos, de allí el nombre.
Cuando resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$ ya sea por factorización o por la fórmula general obtenemos como raíces o soluciones a esta ecuación cuadrática, los siguientes valores:

$$x_2 = 3 \quad y \quad x_2 = 4$$

Ambas raíces o soluciones de la ecuación son valores reales.

Ahora resolvamos la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 16 = 0$
Despejemos la variable x

$$x^2 = -16$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-16}$$
$$x = \pm 4i$$

De donde obtenemos entonces que $\boldsymbol{x_1 = 4i} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{x_2 = -4i}$

Estas soluciones o raíces NO son REALES, es decir no son números reales, son números IMAGINARIOS PUROS, cuya parte real es, en todo caso “cero”, entonces nos encontramos en presencia de raíces o soluciones COMPLEJAS, ya que son números complejos las raíces obtenidas, de allí el nombre del tema, soluciones complejas.

Recordando que cuando se obtiene la raíz cuadrada de una cantidad negativa, tenemos que hacer hincapié en el hecho que las raíces cuadradas tiene doble signo, es decir que, al obtener la raíz cuadrado de 25, lo correcto es decir que ± 5 , así, por ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

Y tratándose de raíces cuadradas de cantidades negativas, funcionará de la misma forma, así:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$

$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$

$$\sqrt{-27} = \pm 3\sqrt{3}i$$

Queremos destacar que, al obtener soluciones complejas en una ecuación, estas soluciones siempre van aparejadas, es decir que si $\boldsymbol{a + bi}$ es una raíz de una ecuación, también será raíz de esa ecuación el número $\boldsymbol{a - bi}$, que es su conjugado.

Por tal razón, al resolver la ecuación $x^2 + 16$ obtenemos como raíces los números $\boldsymbol{4i\ y - 4i}$ que son soluciones complejas conjugadas entre sí.

En esta sesión, nuestro principal interés será el de determinar las raíces reales y/o complejas de una ecuación polinomial de grado $n \geq 1$.

Un número complejo r es una raíz (compleja) de una ecuación polinomial P si $P(r) = 0$.

Enunciaremos unos teoremas que, sin llegar a probarlos, nos ayudarán a encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales.

6.2 Teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinomial $P(x) = 0$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz en el conjunto de los números complejos.

6.3 Teorema de factorización

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos definido por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $n \geq 1$, entonces

$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n); a_n \neq 0, \qquad\qquad (\mathbf{1})$

donde cada $r_i \ (i = 1,2,3 \dots n)$ es una raíz compleja de P.

Si en la ecuación $(\mathbf{1})$ un factor $x - r_i$ ocurre exactamente k veces, entonces r_i es denominada raíz de multiplicidad k.

Si alguna de estas raíces se cuenta como k raíces, entonces deducimos que una ecuación polinómica $P(x) = 0$, para la cual $P(x)$ es de grado $n \geq 1$, tiene por lo menos n raíces, algunas de las cuales se pueden repetir.

Teorema

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y si z es una raíz compleja de z, entonces el conjugado $\bar{z}$ también es raíz de P.

Ejemplo 18

La ecuación polinomial P definida como

$P(x) = (x + 3)^3(x + 1)^2(x^2 + 9) = 0$ es de grado 7, por lo que P tiene 7 raíces; estas son:

$$-3, -3, -3, -1, -1, 3i \ \ y \ \ -3i$$

El número -3 es una raíz de multiplicidad tres, y -1 es una raíz de multiplicidad dos.

Ejemplo 19

Encuentra el polinomio $P(x)$ de grado cuatro con coeficientes reales si P tiene a $1 - i$ y $-2i$ como raíces.

Solución sabemos que si $1 - i$ y $-2i$ son raíces de P, entonces sus conjugados $1 + i$ y $2i$ también son raíces de P. Por tanto,

$$P(x) = [x - (1 - i)][x - (1 + i)][x - (-2i)][x - 2i]$$

$$= x^2 - x(1 + i) - x(1 - i) + (1 - i)(1 + i) + x^2 - 2xi + 2xi + 4$$

$$= (x^2 - x - xi - x + xi + 1 + 1)(x^2 + 4)$$

$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$$

Ejemplo 20

Resuelva la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$

Solución: Al aplicar la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ con } a = 1, b = -2 \ \ y \ \ c = 2,$$

tenemos:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x = 1 \pm i$$

Por tanto, las soluciones son $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$

Comprobaremos la solución x_1, y tú comprueba la solución conjugada x_2

Sustituyendo $1 + i$ en la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$, tenemos

$$(1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 0$$

$$= 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2$$

$$= 1 - 1 + 2i - 2i - 2 + 2$$

$$= 0$$

Ejemplo 21

La función P del ejemplo 11 está definida por

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$$

En la solución de este ejemplo mostramos que

$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$$

El cual es un producto de polinomios cuadráticos.

Ejemplo 22

Para cada una de las siguientes funciones, determina las raíces reales de P , y si es posible determinar las raíces imaginarias. Traza las gráficas de las funciones y verifica la información.

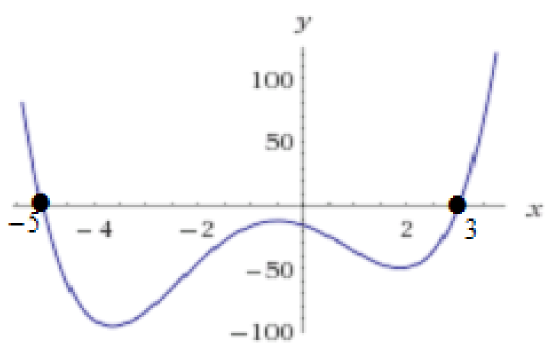
$a)\ P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15 \quad b)\ P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Solución

a) Las raíces reales posibles son factores de -15. Estos divisores son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

Se traza la gráfica de P, la cual se muestra en la Figura 1

Figura 1



De la gráfica, las únicas raíces reales posibles son -5 y 3. Si calculamos $P(-5)$ y $P(3)$ en cada caso obtenemos 0. Por tanto -5 y 3 son raíces reales de P

Corroboremos lo anterior mediante división sintética.

1	3	- 12	- 13		- 15	- 5
	- 5	10	10		15	
1	- 2	- 2	- 3	3	0	
	3	3	3			
1	1	1	0			

De esta manera, $P(x) = (x + 5)\ (x - 3)(x^2 + x + 1)$

Si se iguala a 0 el factor cuadrático y se resuelve la ecuación mediante la fórmula cuadrática se tiene:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, las cuatro raíces de P son $-5, 3, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \ y \ \ \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Comenzamos factorizando $P(x)$

$$P(x) = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) = x^2(x - 2) + (x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 1)$$

Igualando $P(x)$ a cero tenemos $(x - 2)(x^2 + 1) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se tiene

$$x - 2 = 0 \quad \text{O bien} \quad x^2 + 1 = 0$$

Resolviendo $x - 2 = 0$ se obtiene $x = 2$

Considerando la solución de $x^2 + 1 = 0$, se obtiene $x^2 = -1$, de donde $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Así, las raíces de la ecuación son $2, i \ \ y \ -i$

La gráfica $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ se muestra en la Figura 2.

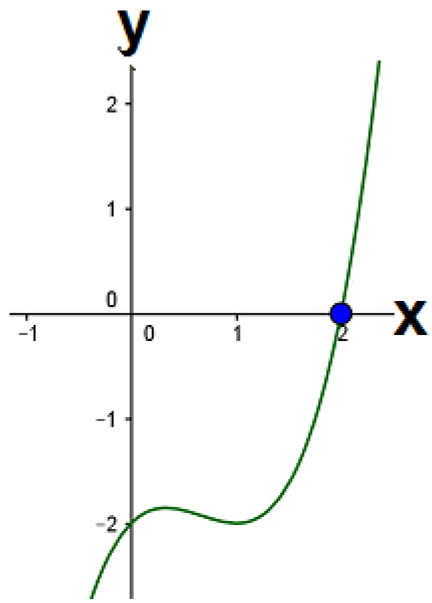


Figura 2

De la gráfica vemos que la única raíz real es 2. Si calculamos $P(2)$ obtenemos $P(2) = {}^{3} - 2(2)^2 + 2 - 2 = 8 - 8 + 2 - 2 = 0,$ lo cual garantiza que 2 es raíz real de P .

Mediante división sintética comprobemos que 2 es raíz real de P.

1	- 2	1	- 2	2
	2	0	2	
1	0	1	0	

Y escribimos $P(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$ tal como se había factorizado antes.

Ejemplo 23

Resuelva las ecuaciones polinomiales siguientes:

$a) x^6 + 20x^4 + 64x^2 = 0$

$b)\ x^4 + 30x^2 + 225 = 0$

$c)\ x^4 + 4x^2 + 16 = 0$

$d)\ 2x^5 - 7x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$

Solución

$a)\ x^6 + 20x^4 + 64x^2 = 0$

$x^6 + 20x^4 + 64x^2 = x^2(x^4 + 20x^2 + 64) = 0$

De donde $x^2 = 0 \quad y \quad x^4 + 20x^2 + 64 = 0$

Si $x^2 = 0$ entonces $x_1 = 0 \ \ y \ \ x_2 = 0$

Si $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$ entonces $(x^2 + 4)(x^2 + 16) = 0$

Para $x^2 + 4 = 0$ tenemos $x^2 = -4 \to x = \pm 2i$

Para $x^2 + 16 = 0$ tenemos $x^2 = -16 \to x = \pm 4i$

Las seis raíces de a) son:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2i, x_4 = -2i, x_5 = 4i,\ x_6 = -4i$

$b)\ x^4 + 30x^2 + 225 = 0$

Factorizando tenemos: $(x^2 + 15)(x^2 + 15) = 0$

Igualando a cero cada factor $x^2 + 15 = 0 \ \to \ x^2 = -15 \ \to x = \pm\sqrt{15}i$

$$x^2 + 15 = 0 \ \to x^2 = -15 \ \to x = \pm\sqrt{15}i$$

Las cuatro raíces son $x_1 = \sqrt{15}i, x_2 = -\sqrt{15}i, x_3 = \sqrt{15}i, x_4 = -\sqrt{15}$i

Las raíces $x_1 \ y \ \ x_3$ son iguales y se dice que tienen multiplicidad dos. Lo mismo ocurre con las raíces $x_2 \ y \ \ x_4$.

$c)\ x^4 + 4x^2 + 16 = 0$

Manipulando algebraicamente la ecuación polinomial dada obtenemos:

$$x^4 + 4x^2 + 16 = (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 = 0$$

$$= (x^2 + 4)^2 \ - 4x^2 = 0$$

$$= [(x^2 + 4) + 2x][(x^2 + 4) - 2x] = 0$$

Igualando cada factor a cero:

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \quad y \quad x^2 - 2x + 4 = 0$$

Resolviendo por la fórmula general cada ecuación cuadrática, tenemos

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2}$$

Haciendo lo mismo para la segunda ecuación, se tiene

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 \ - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2}$$

Las cuatro raíces complejas son:

$x_1 = -1 + \sqrt{3}i, x_2 = -1 - \sqrt{3}i, x_3 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\ , x_4 = 1 - \sqrt{3}i$

$d)2\,x^5 - 7x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$

Para resolver este ejercicio haremos uso de la división sintética.

Escriba primeramente los coeficientes del polinomio: $2, -7, 10, -5, -2, 2$

Denota por p a los divisores del término constante 2.

Denota por q a los divisores del coeficiente principal $2x^5$, es decir 2

Comienza encontrando los divisores.

Divisores de p (divisores de 2) $= \pm 1, \pm 2$

Divisores de q (divisores de 2) $= \pm 1, \pm 2$

Entonces los valores posibles de

$\frac{p}{q} = \frac{divisores\ \ de\ \ 2}{divisores\ \ de\ \ 2} = \pm 1,\ \pm \frac{1}{2}, \pm 2 =$ posibles raíces reales del polinomio.

Ahora verifiquemos por división sintética, cuáles de estas posibles raíces lo son realmente. Sustituimos una por una en el polinomio hasta que determinemos una que haga a $P(x) = 0$

Comenzamos a aplicar la división sintética

Probemos con $x = 1$

$\boxed{1}$ Baja el “

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & -7 & 10 & -5 & -2 & 2 & 1 \\
 & 2 & -5 & 5 & 0 & -2 & \\
\hline
2 & -5 & 5 & 0 & -2 & 0 &
\end{array}
$$

$\boxed{2}$ Multipli … se ha escogido

para prc

$\boxed{3}$ El resultado, que es “2”, lo coloca en la siguiente columna, bajo el -7

$\boxed{4}$ Realiza la operación aritmética en la segunda columna, obteniendo -5

A partir de allí se repite el proceso, solo que esta vez comenzando con **-5**.

$\boxed{5}$ Multiplicamos el -5 por 1 y lo colocamos bajo el 10; al sumar esa columna obtenemos 5.

$\boxed{6}$ Luego multiplicamos 5 por 1, y el resultado 5 lo ubicamos bajo el -5, que al sumarlos, el resultado es 0.

$\boxed{7}$ Este 0 obtenido se multiplica por 1, y el resultado de 0 y lo colocamos bajo el -2, sumamos y nos da -2.

$\boxed{8}$ Este -2 se multiplica por 1, resultado que lo ubicamos bajo el 2, y al sumar obtenemos en la última columna 0. Esto nos indica que el número 1 es raíz de la ecuación polinómica.

Trabajaremos ahora con los coeficientes del polinomio rebajado.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -5 & 5 & 0 & -2 & 1 \\
 & 2 & -3 & 2 & 2 & \\
\hline
2 & -3 & 2 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

Hemos probado nuevamente con 1 y obtenido residuo **0**, entonces la raíz 1 se repite (raíz de multiplicidad dos).

Probemos con $\frac{-1}{2}$ utilizando los últimos coeficientes rebajados.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 2 & 2 & -1/2 \\ & -1 & 2 & -2 & \\ \hline 2 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$\frac{-1}{2}$ es otra raíz.

Por último, formamos una ecuación de segundo grado con los últimos coeficientes rebajados.

$$2x^2 - 4x + 4 = 0$$

Como el discriminante $b^2 - 4ac = (-4)^2 \; - 4(2)(4) = 16 - 32 = -16 < 0$, entonces ya no hay raíces reales. Las dos raíces que faltan son complejas.

Apliquemos la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 \; - 4(2)(4)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} \pm \frac{4i}{2}$$

Las cinco raíces son: $x_1 = 1, x_2 = 1,\; x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = 2 + 2i, x_5 = 2 - 2i$

Ejemplo 24

Resuelva la ecuación $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0$ sabiendo que $1 - i$ es una de las raíces del polinomio asociado.

Solución

Por división sintética tenemos

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -4 & 10 & -4 & 1-i \\ & 2-2i & -1-3i & -8+2i & 4 & \\ \hline \end{array}$$

$$2 \qquad 1-2i \qquad -5-3i \qquad 2+2i \qquad 0$$

Como la raíz conjugada de $1-i$ también es raíz, entonces hacemos uso de la división sintética nuevamente.

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1-2i & -5-3i & 2+2i & & \underline{1+i} \\ & 2+2i & 3+3i & -2-2i & & \\ \hline 2 & 3 & -2 & 0 & & \end{array}$$

Con los números 2 3 y -2, formamos la ecuación $2x^2+3x-2=0$ y la resolvemos por factorización:

$$2x^2+3x-2=0 \rightarrow (2x-1)(x+2)=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}\ y\ x=-2$$

Así las cuatro raíces son $x_1=1-i,\ x_2=1+i, x_3=\frac{1}{2}, x_4=-2$.

7. Bibliografía

1. Algebra Lineal. Cuadernos de Cátedra. Luis Arenivar. Editorial Universidad don Bosco 2012.
2. Algebra Vectorial y Matrices, Luis Arenivar. Editorial Universidad don Bosco 2019.
3. El cálculo, Luis Leithold. 7ª edición.1998. Editorial Oxford University.

Conclusiones

1. El desarrollo de una clase virtual bien hecha implica un trabajo de preparación bastante intenso si lo que se busca es hacer bien las cosas.
2. El maestro virtual debe de poseer capacidades tecnológicas así como didácticas para desarrollar una clase virtual efectiva.
3. Es importante tener en cuenta todo el cúmulo de conocimientos adquiridos en esta maestría ya que se ven expuestos en algún momento en un proyecto como este.
4. Todo el trabajo se debe hacer pensando en el estudiante, en que todo lo quede claro a él, que sea accesible y entendible para el alumno primeramente.
5. Ser un docente virtual requiere de gran capacidad tecnológica y pedagógica por parte del docente, ser un buen docente virtual requiere de características que deben ser puestas en práctica en el desarrollo de las clases.